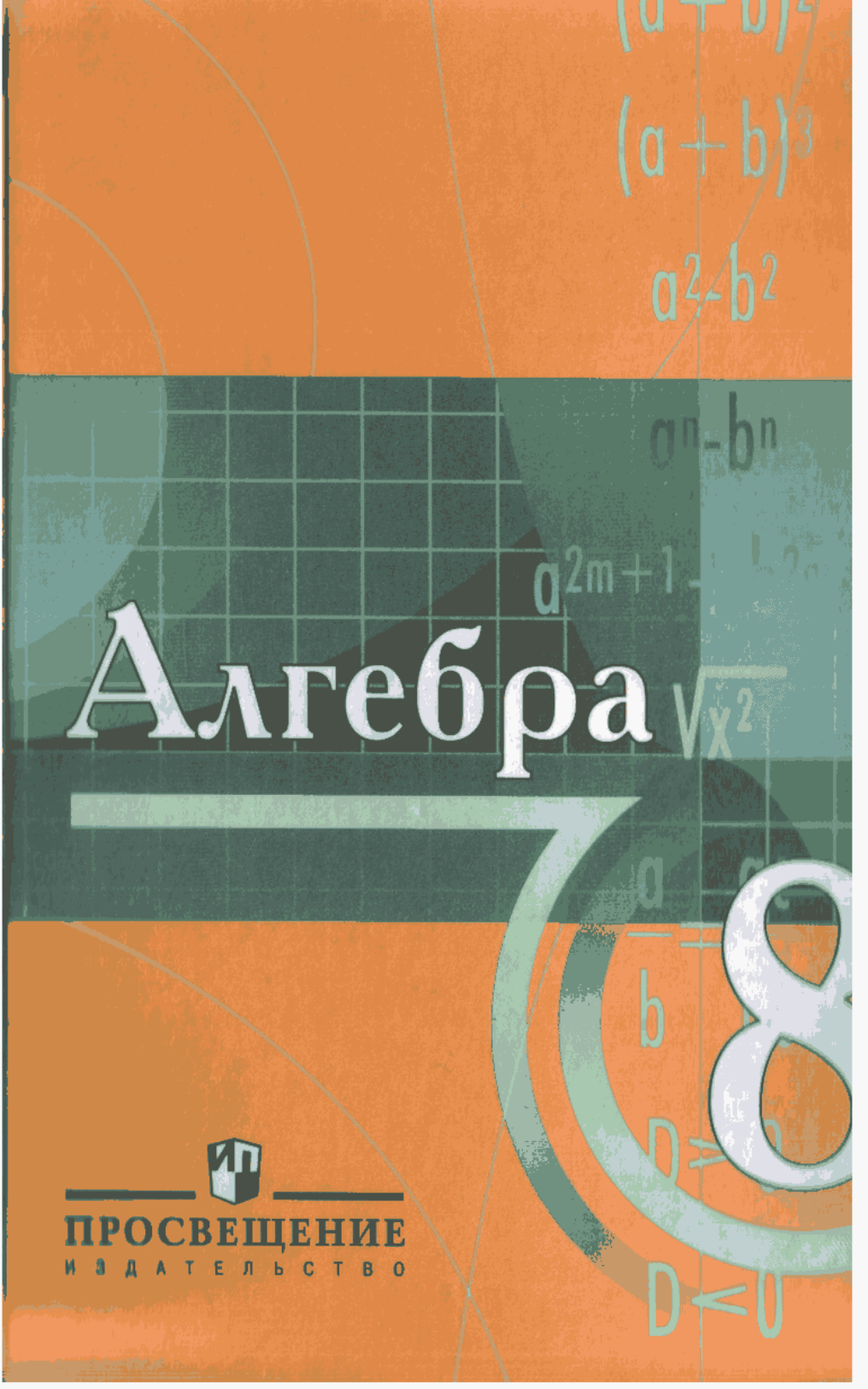

Алгебра
7
8
ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Авторы: Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, Г. С. Сурвилло,
Ю. А. Дробышев, И. В. Дробышева, А. И. Кудрявцев

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/15 от 31.10.07) и Российской академии образования (№ 01-201/5/7д от 11.10.07)

Условные обозначения:

— текст, который нужно запомнить

— материал, который важно знать

— задания для общеобразовательных классов

— задания для углубленного изучения

— задания повышенной трудности

— задания с выбором ответа (углубл.)

— задания с выбором ответа (общеобр.)

Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений и
А45 шк. с углубл. изучением математики / [Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, Г. С. Сурвилло и др.]; под ред. Н. Я. Виленкина. — 9-е изд., дораб. — М. : Просвещение, 2010.— 303 с. : ил.— ISBN 978-5-09-019502-7.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-019502-7

© Издательство «Просвещение», 1995
© Издательство «Просвещение», с изменениями, 2010
© Художественное оформление. Издательство «Просвещение», 2010
Все права защищены

Глава I

ДРОБИ

1. ПОНЯТИЕ ДРОБИ

Определение. Запись $\frac{a}{b}$, в которой a и b — числа или выражения, называют *дробью*. Выражение a называют *числителем дроби*, а выражение b — ее *знаменателем*.

Различают дроби числовые и алгебраические. Например, дроби

$\frac{22}{7}$, $-\frac{6}{5}$, $\frac{1,7+0,2}{3,1-0,2}$, $\frac{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}{\frac{7}{11}-\frac{4}{25}}$ являются *числовыми* дробями,

а дроби $\frac{1}{5x+y}$, $\frac{4x(x+1)+y}{5y(y+1)+x}$ — *алгебраическими* дробями.

Алгебраические дроби могут принимать те или иные числовые значения в зависимости от значений входящих в них букв. Так, дробь $\frac{1}{5x+y}$ при $x=2$ и $y=0$ принимает значение $\frac{1}{10}$, при $x=-5$ и $y=-1$ она равна $-\frac{1}{26}$.

В случае, когда знаменатель дроби равен нулю, эта дробь не имеет значения. Например, дробь $\frac{a}{(a-1)(a+3)}$ не имеет значения при $a=-3$

$a=1$. Дробь $\frac{9b}{c-c}$ не имеет значения ни при каких значениях переменных b и c.

Дробь равна нулю в том и только в том случае, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Например, дробь $\frac{x-8}{x+9}$ обращается в нуль при $x=4$, так как $2\cdot 4-8=0$ и $4+9\neq 0$, дробь $\frac{2x-8}{x(x-4)}$ при $x=4$ не имеет числового значения, так как при этом значении x не только числитель, но и знаменатель дроби обращается в нуль.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие из следующих выражений являются дробями:
$\frac{a}{b}$, $\frac{1}{5}b$, $\frac{2}{x-y}$, $\frac{a}{2x}+1$, $\frac{y}{1}$, $2\frac{4}{7}$, $\frac{18}{7}$, $\frac{a}{5}$, $\frac{3}{b}$?

2. Составьте дробь, у которой:
а) числитель — произведение x на y, а знаменатель — сумма x и y;
б) числитель — разность x и y, а знаменатель — частное от деления x на y.

3. Чем отличаются друг от друга дроби $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ и $\frac{\frac{a}{b}}{c}$?

4. Как можно понять запись $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$? Укажите все варианты.

5. Какими числами (равными, противоположными, обратными) являются соответственные значения выражений:

а) x и $\frac{1}{x}$; в) $\frac{y}{5}$ и $\frac{-y}{5}$; д) $\frac{y}{5}$ и $\frac{y}{-5}$; ж) $\frac{y}{5}$ и $\frac{5}{y}$;

б) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$; г) $-\frac{y}{5}$ и $\frac{-y}{5}$; е) $\frac{y}{5}$ и $\frac{-y}{-5}$; з) $\frac{y}{5}$ и $-\frac{5}{y}$?

6. Назовите числитель и знаменатель дроби:

а) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; б) $\frac{8}{x^4+6x^2y^2+y^4}$; в) $\frac{11x^3-8y^3}{9}$; г) $\frac{16x^8-9y^6}{3x^2+8y^2}$.

7. Напишите дробь с числителем 5 и знаменателем:

а) x^6-y^6;
б) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$;
в) $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$;
г) $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

8. Напишите дробь с числителем $a-b$ и знаменателем:

а) $\frac{x}{y}+6$; б) $\frac{x^3-y^3}{x+3y}$; в) $\frac{a^3+b^3}{a-3b}$.

9. Напишите дробь со знаменателем x^6-y^6 и числителем:

а) 8; б) $\frac{a}{b}+b$; в) a^2+b^2; г) $\frac{a^3-b^3}{a+b}$; д) x^2-y^2; е) x^3-y^3.

10. Напишите выражение, противоположное данному (т. е. выражение, отличающееся от данного только знаком):

а) x; в) $a-b$; д) $\frac{a}{b}$; ж) $\frac{a-b}{3}$;

б) $-2p$; г) $2x-y$; е) $-\frac{x}{5}$; з) $\frac{12}{q-p}$.

11. Если $a=4\frac{3}{5}$ и $b=4{,}4$, то $\frac{1}{a-b}=5$. Найдите при тех же значениях a и b значение выражения:

а) $\frac{1}{b-a}$; б) $a-b$; в) $b-a$; г) $\frac{b-a}{3}$.

12. Докажите тождество:

а) $\frac{a-b}{b-a}=-1$; б) $\frac{y-x}{x+y}=-\frac{x-y}{x+y}$.

13. Найдите значение дроби:

а) $\frac{0{,}75\cdot 0{,}4-5{,}7}{1{,}86:0{,}31}$; б) $\frac{1{,}95:1{,}3+2{,}5}{3{,}4\cdot 0{,}8+3{,}28}$; в) $\frac{2{,}5+3\frac{1}{3}}{2{,}5-3\frac{1}{3}}$; г) $\frac{4\frac{3}{5}+2\frac{1}{3}}{4{,}6-2\frac{1}{3}}$.

14. Составьте таблицу значений дроби $\frac{y-1}{y}$ для значений y, равных -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3. При каких значениях y дробь обращается в нуль? При каких y она не имеет значения?

15. Заполните таблицу значений дроби $\frac{x}{y}$:

x \ y	-2	-1	0	1	2
-2					
-1					
0					
1					
2					

16. При каком значении переменной значение дроби:

а) $\frac{x-3}{5}$ равно 1; в) $\frac{3}{y+6}$ равно -1;

б) $\frac{p-7}{3}$ равно 5; г) $\frac{45}{q-1}$ равно 9?

17. При каких x и y дробь имеет числовое значение:

а) $\frac{5}{x-2}$; в) $\frac{x+4}{2x+8}$; д) $\frac{3y+1}{y(4y-1)}$; ж) $\frac{y(y+8)}{6}$;

б) $\frac{2x}{x+6}$; г) $\frac{y}{7y+4}$; е) $\frac{48}{(2y-6)(9+10y)}$; з) $\frac{y(y+8)}{6y}$?

18. Напишите дробь, не имеющую значения при:

а) $x=7$; б) $a=-9$; в) $y=6$ и $y=13$; г) $b=0$ и $b=-2$.

19. При каком условии не имеет значения дробь:

а) $\frac{8}{x-y}$; в) $\frac{1}{(a-b)(a+b)}$; д) $\frac{4}{a(b-2)}$;

б) $\frac{15}{a+b}$; г) $\frac{1}{ab}$; е) $\frac{23}{(a-4)(b-6)}$?

Укажите для каждой из этих дробей пару значений переменных, при которых дробь не имеет значения.

20. Докажите, что значение дроби равно нулю:

а) $\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{24}\right)\cdot 8-\frac{1}{3}}{1{,}85-1{,}62:0{,}9}$; б) $\frac{\left(1\frac{2}{9}:7\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot 0{,}23}{2\frac{1}{8}+1{,}2}$.

21. Докажите, что следующее выражение не имеет числового значения:

а) $\frac{8{,}3\cdot 1{,}2+4{,}2}{\left(3\frac{3}{5}-2\frac{1}{15}\right)\cdot 5-7\frac{2}{3}}$; б) $\frac{\left(5-3\frac{2}{3}\right)\cdot 6-7{,}9}{5{,}6\cdot 2{,}1-11{,}76}$.

22. Всегда ли равна нулю дробь, числитель которой равен нулю?

23. Равна ли нулю дробь:

а) $\frac{3{,}6:11\frac{11}{25}-2{,}5}{\frac{21}{31}:9-\frac{3}{4}\cdot 11\frac{15}{16}}$; б) $\frac{-8:\frac{2}{5}+2\frac{2}{9}\cdot 9}{1\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}-1:\frac{5}{7}}$?

24. При каких значениях y равна нулю дробь:

а) $\frac{y}{5}$; в) $\frac{y-12}{y(y+1)}$; д) $\frac{y(y-3)}{8y}$;

б) $\frac{y-1}{3}$; г) $\frac{(2y+8)(y-7)}{y-1}$; е) $\frac{(3+y)(y+6)}{(y+3)(6+y)}$?

25. Обращается ли в нуль при каком-нибудь значении x дробь:

а) $\frac{7}{x-2}$; б) $\frac{x-2}{7}$?

26. Решите уравнение:

а) $\frac{x-8}{125}=0$; г) $\frac{2x+7}{x-2}=0$; ж) $\frac{(x-4)(x+4)}{x}=0$;

б) $\frac{5x-12}{37}=0$; д) $\frac{x-5}{5-x}=0$; з) $\frac{9}{x}=0$.

в) $\frac{x-3}{x}=0$; е) $\frac{x(x+8)}{x}=0$;

2. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ ДВУХ ОДНОЧЛЕНОВ

Одночлены $4a^3b^2$ и $5a^2b^3$ делятся на одночлен ab. Именно, $4a^3b^2 : ab = 4a^2b$, $5a^2b^3 : ab = 5ab^2$, так как $4a^3b^2 = ab \cdot 4a^2b$, а $5a^2b^3 = ab \cdot$ Поэтому ab называют *общим делителем* этих одночленов.

Определение. Общий делитель двух одночленов, ющий по каждой из переменных наивысшую возмож степень, называют *наибольшим общим делителем* (Н этих одночленов.

Чтобы найти НОД двух одночленов, нужно взять перемен входящие в каждый из них, затем из показателей, с которыми входят в эти одночлены, выбрать наименьшие (или любой из если эти показатели равны друг другу) и перемножить получе степени.

Пример 1.

Найдем наибольший общий делитель одночленов $6a^2bc^7$ и 1

Решение. В оба одночлена входят переменные a и b. При в первый одночлен a входит с показателем 2, а во второй — казателем 6. Поэтому в НОД эта переменная входит с показател

ременная же b в оба одночлена входит с показателем 1 (напом-м, что $b^1=b$). Поэтому с тем же показателем b входит и в НОД их одночленов. Таким образом, НОД для $6a^2bc^7$ и $11a^6b$ равен a^2b. шут:

$$\text{НОД}(6a^2bc^7;\ 11a^6b)=a^2b.$$

Отметим, что в качестве НОД $6a^2bc^7$ и $11a^6b$ можно выбрать так- одночлены $2a^2b$, $0{,}3a^2b$ и вообще любой одночлен с буквенной стью a^2b. Иными словами, НОД *двух одночленов определен лишь точностью до коэффициента.*

Одночлен $8a^3b^6c^4$ делится и на одночлен $2a^2b^4c^3$, и на одночлен a^3b^3c:

$$8a^3b^6c^4 : 2a^2b^4c^3 = 4ab^2c;$$

$$8a^3b^6c^4 : 11a^3b^3c = \frac{8}{11}\,b^3c^3.$$

этому он кратен и первому, и второму из этих одночленов, т. е. ляется их *общим кратным.*

пределение. ***Наименьшим общим кратным*** **(НОК) ух одночленов называется их общее кратное, имеющее каждой из переменных наименьшую из возможных епеней.**

Чтобы получить НОК двух одночленов, нужно взять все перемен-е, входящие хотя бы в один из них, а из показателей, с которы- они входят в эти одночлены, выбрать наибольшие, после чего ремножить полученные степени. Если переменная входит лишь в ин одночлен, то ее берут с тем показателем, с которым она в не- входит.

ример 2.

Найдем НОК одночленов $6a^3b^4c^2$ и $8a^5b^4d$.

Решение. В НОК данных одночленов входят переменные a, b, и d. При этом a входит с показателем 5 (большим из показателей и 5), b — с показателем 4 (с таким показателем эта переменная ходит в оба одночлена), c — с показателем 2 (с ним она входит первый одночлен, а во втором ее нет), d — с показателем 1 бъясните, почему это так). Поэтому

$$\text{НОК}(6a^3b^4c^2;\ 8a^5b^4d)=a^5b^4c^2d.$$

НОК двух одночленов тоже определено лишь с точностью до ко-ффициента.

УПРАЖНЕНИЯ

27. Напишите все делители одночлена (положите их коэффициенты равными 1):

а) $17a^3b^2$; б) $1{,}3x^2y^4$; в) $12abc^2$; г) $\frac{5}{6}xy^7$.

28. Напишите по три кратных одночлена:

а) $12x^2yz^3$; б) $26a^3x^4z^2$; в) $6{,}3x^3y^5$; г) $\frac{7}{3}a^4b^5c^6d^8$.

29. Напишите по три общих делителя одночленов:

а) $7a^2x^3$ и $5a^4x$;
б) $5a^3$ и $6a^4b$;
в) $8abc^3$ и $6a^3bcd^2$;
г) $32x^4y$ и $13ax^4$.

30. Напишите по четыре общих кратных одночленов:

а) $5ab$ и $6xy$;
б) $25x^2y$ и $6xy^3$;
в) $7x^2$ и $8x^4$;
г) $3xy^2z^3$ и $5x^2yz^4$.

31. Найдите наибольший общий делитель одночленов:

а) $9x^4$ и $15x^3$;
б) $17x^5y^2z^4$ и $8x^3y$;
в) $\frac{19}{3}x^6y^2z^5$ и $\frac{26}{13}x^3y^4z^3$;
г) $0{,}3a^2b^4c^5$ и $\frac{3}{7}a^4b^3c^9d^5$.

32. Найдите наименьшее общее кратное одночленов:

а) $3x^2$ и x^4;
б) $6a^2b^3$ и $3x^2y^4$;
в) $5a^3x^4z^2$ и $3a^6xy^3$;
г) $\frac{3}{4}a^4b^3x^2y^2$ и $\frac{5}{6}a^4c^2x^3z^6$.

33. Найдите наибольший общий делитель одночленов:

а) $8a^2b^3c$ и $4ab^2c^3$;
б) $5{,}7x^4y^2z^5$ и $0{,}3x^2y^3z^2$.

34. Найдите наименьшее общее кратное одночленов:

а) $6a^4b^7d$ и $8a^6b^2c^3$;
б) $\frac{8}{3}x^4y^3z$ и $\frac{5}{4}a^3x^4y^2$.

3. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

В 6 классе было показано на примерах, что значение дроби не изменяется, если умножить ее числитель и знаменатель на одно и то же число, отличное от нуля. Например,

$$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 7}=\frac{21}{28}.$$

В общем виде это свойство выражают так:

если b и c отличны от нуля, то выполняется равенство

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}. \qquad (1)$$

Докажем это утверждение в общем виде. Пусть $\frac{a}{b}=x$. По определению деления это означает, что $a=bx$. Умножив обе части этого равенства на c, получим $ac=(bx)\cdot c=(bc)\cdot x$. Так как $b\neq 0$, $c\neq 0$, то $bc\neq 0$, поэтому $x=\frac{ac}{bc}$. Так как $x=\frac{a}{b}$ и $x=\frac{ac}{bc}$, то $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$.

Тождество (1) называют **основным свойством дроби**. На нем основаны *сокращение дробей и приведение дробей к общему знаменателю.*

Пример 1.

Сократим дроби:

а) $\frac{2ax}{3ay}$; б) $\frac{4(a-b)\cdot c}{7(a-b)\cdot d}$; в) $\frac{6(a+b)(x-y)}{10(c+d)(x-y)}$.

Решение.

а) $\frac{2ax}{3ay}=\frac{2x\cdot a}{3y\cdot a}$, т. е. числитель и знаменатель имеют общий множитель a. При $a\neq 0$ дробь можно сократить на a. Получаем дробь $\frac{2x}{3y}$. Значит,

$$\frac{2ax}{3ay}=\frac{2x}{3y}.$$

б) Общий множитель числителя и знаменателя дроби равен $a-b$. Сокращая на него (при $b\neq a$), получим

$$\frac{4(a-b)\cdot c}{7(a-b)\cdot d}=\frac{4c}{7d}.$$

в) $\frac{6(a+b)(x-y)}{10(c+d)(x-y)}=\frac{3(a+b)}{5(c+d)}=\frac{3a+3b}{5c+5d}$ (при $x\neq y$).

Обычно дробь сокращают на НОД числителя и знаменателя.

Пример 2.

Сократим дробь $\frac{14a^2b^3}{21a^3b^2}$.

Решение. НОД $(14a^2b^3;\ 21a^3b^2)=a^2b^2$. Сокращаем дробь на a^2b^2.

Так как $14a^2b^3 : a^2b^2 = 14b$, $21a^3b^2 : a^2b^2 = 21a$, то $\frac{14a^2b^3}{21a^3b^2} = \frac{14b}{21a}$. Можно сократить дробь еще на 7. Получаем $\frac{14a^2b^3}{21a^3b^2} = \frac{2b}{3a}$.

Любую алгебраическую дробь, знаменателем которой является одночлен, можно привести к новому знаменателю, кратному знаменателю этой дроби.

Пример 3.

Приведем дробь $\frac{11a^3b^2}{6xy^4}$ к знаменателю $2x^2y^6$.

Решение. Так как $2x^2y^6 : 6xy^4 = \frac{1}{3}xy^2$, то надо умножить числитель и знаменатель дроби на дополнительный множитель $\frac{1}{3}xy^2$. Имеем

$$\frac{11a^3b^2}{6xy^4} = \frac{11a^3b^2 \cdot \frac{1}{3}xy^2}{6xy^4 \cdot \frac{1}{3}xy^2} = \frac{\frac{11}{3}a^3b^2xy^2}{2x^2y^6}.$$

Любые две алгебраические дроби можно привести к общему знаменателю, кратному знаменателям этих дробей. Обычно их приводят к знаменателю, равному НОК знаменателей.

Пример 4.

Приведем к общему знаменателю дроби

$$\frac{9x^4y^2}{4a^3b^5} \text{ и } \frac{2a^2}{3b^7y^6}.$$

Решение. Имеем НОК $(4a^3b^5; 3b^7y^6) = a^3b^7y^6$. Удобно заменить $a^3b^7y^6$ на $12a^3b^7y^6$, так как 12 делится на 4 и на 3. Поскольку

$$12a^3b^7y^6 : 4a^3b^5 = 3b^2y^6, \quad 12a^3b^7y^6 : 3b^7y^6 = 4a^3,$$

то

$$\frac{9x^4y^2}{4a^3b^5} = \frac{9x^4y^2 \cdot 3b^2y^6}{4a^3b^5 \cdot 3b^2y^6} = \frac{27b^2x^4y^8}{12a^3b^7y^6}$$

и

$$\frac{2a^2}{3b^7y^6} = \frac{2a^2 \cdot 4a^3}{3b^7y^6 \cdot 4a^3} = \frac{8a^5}{12a^3b^7y^6}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

35. Ученик сказал, что при сокращении дробей отбрасывают одинаковые слагаемые в числителе и знаменателе. Не ошибся ли он? Проверьте справедливость или ложность равенства

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+c}$$

при: а) $a=3,\ b=5,\ c=7$; б) $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{3},\ c=-\frac{1}{6}$.

36. Сравните соответственные значения выражений $\frac{a}{b}$ и $\frac{ac}{bc}$ при:

а) $a=3,\ b=5,\ c=7$; б) $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{3},\ c=-\frac{1}{6}$.

37. Сократите дробь:

а) $\frac{10x}{10y}$; в) $\frac{-6p}{-2q}$; д) $\frac{ab}{-ac}$; ж) $\frac{abx}{aby}$;

б) $\frac{6a}{9b}$; г) $\frac{2a}{-4y}$; е) $\frac{-ac}{bc}$; з) $\frac{(a+b)\cdot x}{(a+b)\cdot y}$.

38. Представьте выражение в виде дроби со знаменателем $10x$:

а) $\frac{-a}{-10x}$; б) $\frac{a}{-10x}$; в) $-\frac{-a}{-10x}$; г) $-\frac{-a}{10x}$.

39. Сократите дробь:

а) $\frac{a(b-2)}{5(b-2)}$; б) $\frac{3(x+4)}{c(x+4)}$; в) $\frac{15a(a-b)}{20b(a-b)}$; г) $\frac{35y(x+2y)}{42x(x+2y)}$.

В каждом случае укажите, при каких значениях переменных это сокращение неверно.

40. Докажите, что дроби не являются тождественно равными:

а) $\frac{x+3}{6}$ и $\frac{x}{2}$; б) $\frac{a+1}{a}$ и $\frac{1}{a}$.

41. Сократите дробь:

а) $\frac{5(a-b)}{8(b-a)}$; г) $\frac{22(a-3c)}{33(3c-a)}$; ж) $\frac{xy-3y}{9-3x}$;

б) $\frac{a(x-2y)}{b(2y-x)}$; д) $\frac{-45b(2b-7)}{18bc(7-2b)}$; з) $\frac{-6pq+20p}{3q-10}$;

в) $\frac{5x(y-x)}{x(y-x)}$; е) $\frac{8(a-12)}{12b-ab}$; и) $\frac{2a-8b}{12b-3a}$.

42. Сократите дробь:

а) $\frac{8ax}{12bx}$; б) $\frac{9abx}{27acx}$; в) $\frac{6(a+b)x}{15(c+d)x}$; г) $\frac{21(a+b)x}{28(a+b)y}$;

д) $\frac{a(a+b)(c+d)(x+y)}{b(a+b)(c+d)(x-y)}$; е) $\frac{a(3a-2b)(2x+y)}{a(3a+2b)(2x+y)}$.

43. Вынесите за скобку общие множители в числителе и знам и сократите дробь:

а) $\frac{3a+12b}{6ab}$; г) $\frac{7m}{7n+21}$; ж) $\frac{a-3b}{ac-3bc}$;

б) $\frac{15b-20c}{10b}$; д) $\frac{2a-4}{3(a-2)}$; з) $\frac{x+5y}{3xz+15yz}$;

в) $\frac{3x}{9x-6y}$; е) $\frac{5x(y+3)}{6y+18}$; и) $\frac{ax-4bx}{ay-4by}$.

44. Приведите дробь $\frac{5a}{3b}$ к знаменателю:

а) $6b$; б) $21b$; в) $3bc$; г) $105bx$.

45. Сократите дробь:

а) $\frac{15x^3}{6x^8}$; в) $\frac{7a^4x^8}{15a^8x^4}$; д) $\frac{27a^9x^{15}}{81a^6x^{18}}$;

б) $\frac{9x^3y}{10xy}$; г) $\frac{5a^4b^2x^3}{6ab^3x^4}$; е) $\frac{a^mb^n}{a^{m-2}b^{n-3}}$.

46. Вычислите значение выражения:

а) $5^6:5^4$; г) $\left(1\frac{1}{3}\right)^6:\left(1\frac{1}{3}\right)^3$; ж) $(8^5\cdot 8^3):8^{14}$;

б) $10^8:10^7$; д) $10^8:10^{12}$; з) $(1{,}1^9\cdot 1{,}1^4):(1{,}1$

в) $(0{,}5)^{10}:(0{,}5)^7$; е) $2^{28}:2^{32}$;

47. С помощью таблицы степеней чисел 2 и 3 найдите зн выражения:

а) $\frac{16\cdot 32}{1024}$; б) $\frac{81\cdot 243}{6561}$; в) $\frac{8\cdot 128\cdot 27\cdot 729}{512\cdot 59\,049}$.

48. Сократите дробь:

а) $\frac{6x^3}{8x^5}$; в) $\frac{6x^5}{7x^5}$; д) $\frac{12x^3y^2}{5x^4y^3}$; ж) $\frac{-\frac{3}{7}a^5x^6}{\frac{2}{21}a^4y^2}$;

б) $\frac{10x^8}{5x^4}$; г) $\frac{6a^2b}{9ab^2}$; е) $\frac{-2{,}1a^4x^3}{3{,}5a^3x^4}$; з) $\frac{216a^2b^3c^4}{64a^5bc^4}$.

49. Представьте в виде степени с основанием c:

а) $c^5\cdot(c^2)^3$; в) $(c^4)^2\cdot(c^5)^3$; д) $\frac{(c^2)^4\cdot(c^3)^3}{(c^4)^5}$;

б) $c^3\cdot(c^2)^5$; г) $(c^2)^3\cdot(c^3)^5$; е) $\frac{(c^3)^5\cdot(c^2)^7}{(c^3)^2\cdot(c^2)^{11}}$.

50. Представьте в виде дроби вида $\frac{1}{c^n}$:

а) $\frac{(c^7)^2}{(c^8)^3}$; б) $\frac{(c^6)^3 \cdot (c^2)^8}{(c^9)^3 \cdot (c^3)^4}$.

51. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5^3 \cdot 25^2}{5^8}$; б) $\frac{2^5 \cdot 8^3}{4^6}$; в) $\frac{9^4 \cdot 49^2}{3^5 \cdot 7^4}$; г) $\frac{5^5 \cdot 8^3}{4^5 \cdot 25^3}$.

52. Упростите выражение:

а) $\frac{(ab)^3}{(ac)^4}$; в) $\frac{(2ax)^5}{(4bx)^8}$; д) $\frac{(a^2b^3)^4}{(a^3b^2)^5}$; ж) $\frac{(5a^2y^4)^3}{(3b^3x^5)^3} \cdot \frac{(6b^2x^7)^2}{(10a^3y^5)^2}$;

б) $\frac{(bxz)^4}{(bcz)^5}$; г) $\frac{(3axt)^7}{(6acx)^8}$; е) $\frac{(2a^3x^4)^5}{(3a^2x^6)^4}$; з) $\frac{(2b^2x^7)^2}{(3ay^5)^4} : \frac{(4b^3x^4)^3}{(15a^2y^3)^2}$.

53. Представьте дробь в виде одночлена:

а) $\frac{4x^3y}{3xy}$; в) $\frac{25x^6y^7(3a-b)^4}{5xy^6(3a-b)^4}$;

б) $\frac{7x^4y^5(a+b)^2}{5xy^2(a+b)^2}$; г) $\frac{8x^4(2a-x)^3(a+b)^4}{4x(2a-x)^3(a+b)^4}$.

54. Приведите дробь:

а) $\frac{17x^2}{6y^2}$ к знаменателю $5a^2b^2y^4$;

б) $\frac{3{,}6a^3y^2}{9{,}6x^2z^3}$ к знаменателю $192x^4y^2z^5$;

в) $\frac{\frac{2}{9}b^2t^4}{\frac{1}{3}c^2t^2x^3}$ к знаменателю $4a^2c^3t^5x^{10}$;

г) $\frac{-0{,}6a^2b^4c^5}{7x^3y^4z^5}$ к знаменателю $2a^3b^2c^6x^3y^{10}z^8$.

55. Упростите выражение:

а) $7^3 : 7^9$; д) $\frac{c^2 \cdot c^5}{c^3}$; з) $\frac{a^{15}}{a^7 \cdot a^8}$;

б) $x^{15} : x^{12}$; е) $\frac{x^{12}}{x^5 \cdot x^4}$; и) $\frac{a^4}{a^9 \cdot a^3}$;

в) $(2x)^{34} : (2x)^{36}$; ж) $\frac{(2y)^{21} \cdot 2y}{(2y)^{20}}$; к) $\frac{3(2a-9b)^3}{4(2a-9b)^7}$.

г) $(7x+y)^3 : (7x+y)^{11}$;

4. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

Правило умножения дробей было выведено в 6 классе:

Произведение двух дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителей этих дробей, а знаменатель — произведению знаменателей.

В общем виде это правило записывают так:
если $b \neq 0$ и $d \neq 0$, то

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Докажем это утверждение. Пусть $\frac{a}{b} = x$ и $\frac{c}{d} = y$. Тогда верны равенства $a = bx$ и $c = dy$. Перемножая их, получим

$$ac = (bx) \cdot (dy) = (bd) \cdot (xy).$$

Значит, $xy = \frac{ac}{bd}$. Итак, $xy = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ и $xy = \frac{ac}{bd}$, а потому $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Формула (1) позволяет заменить произведение любых двух дробей одной дробью. В дальнейшем вместо «умножим дробь на дробь и заменим произведение дробью» будем писать короче — «умножим дробь на дробь». Аналогичный смысл будут иметь слова «разделим дробь на дробь», «сложим дроби» и т. д. После умножения дробей полезно сократить полученную дробь, если это возможно.

Пример 1.

Умножим дроби

$$\frac{8ab}{5cd} \text{ и } \frac{6cx}{7ay}.$$

Решение.

$$\frac{8ab}{5cd} \cdot \frac{6cx}{7ay} = \frac{8ab \cdot 6cx}{5cd \cdot 7ay} = \frac{48abcx}{35acdy}.$$

После сокращения на ac получаем ответ $\frac{48bx}{35dy}$.

Пример 2.

Найдем произведение дробей

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{b}{a}.$$

Решение. Имеем $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba}$. Дробь $\frac{ab}{ba}$ получается из дроби $\frac{1}{1}$ путем умножения числителя и знаменателя на ab, потому эта дробь равна 1. Значит, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ называют **обратными** друг другу. Их произведение равно 1.

Перейдем к делению дробей. *Частным* от деления дроби $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{c}{d}$ называется такое x, что $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot x$. Чтобы найти это x, умножим обе части равенства $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot x$ на дробь $\frac{d}{c}$. Получим

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\left(\frac{c}{d}\cdot x\right)\cdot\frac{d}{c}=\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}\right)\cdot x=1\cdot x=x.$$

Значит, $x=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Чтобы разделить дробь на дробь, надо умножить первую дробь на дробь, обратную второй.

Пример 3.

Найдем частное от деления дроби $\frac{5cx}{12ay}$ на дробь $\frac{9bx}{11dy}$.

Решение. Чтобы найти частное, надо умножить $\frac{5cx}{12ay}$ на дробь $\frac{11dy}{9bx}$. Имеем $\frac{5cx}{12ay}:\frac{9bx}{11dy}=\frac{5cx}{12ay}\cdot\frac{11dy}{9bx}=\frac{55cdxy}{108abxy}=\frac{55cd}{108ab}$.

УПРАЖНЕНИЯ

56. Найдите произведение дробей и сократите получившуюся дробь (если это возможно):

а) $\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{2}$; в) $\frac{b}{10}\cdot\frac{5}{b}$; д) $\frac{m}{2n}\cdot\frac{3n}{m}$; ж) $\frac{6bc}{5ad}\cdot\frac{15ax}{18by}$;

б) $\frac{3a}{4}\cdot\frac{8}{9}$; г) $\frac{2}{a}\cdot\frac{b}{7}$; е) $\frac{2x}{3}\cdot\frac{x}{a}$; з) $\frac{8xy}{9ab}\cdot\frac{3ac}{4xy}$.

57. Представьте один из множителей в виде дроби со знаменателем 1 и запишите произведение в виде дроби:

а) $x\cdot\frac{a}{b}$; в) $a\cdot\frac{2}{a}$; д) $-1\cdot\frac{-a}{b}$;

б) $\frac{2a}{5c}\cdot y$; г) $-b\cdot\frac{5}{2b}$; е) $\frac{-x}{y}\cdot(-b)$.

58. Найдите произведение дробей:

а) $\frac{2a}{5x}\cdot\frac{3b}{7y}$; б) $\frac{5x-3y}{x+2y}\cdot\frac{x-2y}{5x+3y}$; в) $\frac{2a+3b}{x}\cdot\frac{y}{7a-2b}$;

г) $\frac{2x+y}{3ab} \cdot \frac{x-y}{5cd}$; е) $\frac{ac}{x+y} \cdot \frac{2x-3y}{ab}$; з) $\frac{5a+2b}{6abx} \cdot \frac{4b}{y(5a+}$

д) $\frac{7ab}{2x-y} \cdot \frac{6x+y}{11ab}$; ж) $\frac{bc}{2x+2y} \cdot \frac{x+y}{b}$;

59. Представьте частное в виде дроби:

а) $\frac{x}{y} : \frac{2}{3}$; б) $\frac{m}{2n} : \frac{3m}{n}$; в) $\frac{p}{9} : \frac{q}{3}$; г) $\frac{6a}{b} : \frac{c}{12d}$.

60. Упростите выражение:

а) $b : \frac{1}{a}$; б) $\frac{1}{x} : y$; в) $3a : \frac{12a}{b}$; г) $\frac{15x}{8y} : 5x$.

61. Найдите частное:

а) $\frac{3a}{5x} : \frac{6b}{19y}$; д) $\frac{8cd}{2u+v} : \frac{3cd}{u+4v}$;

б) $\frac{3a+b}{8x} : \frac{5a-b}{6y}$; е) $\frac{bc}{5x+5y} : \frac{b}{7x+7y}$;

в) $\frac{5a-4b}{4x-5y} : \frac{3a+b}{2x+11y}$; ж) $\frac{(a+b)(2x+y)}{(2a+b)(x+y)} : \frac{(2x+y)a}{(2a+b)x}$;

г) $\frac{2x+8y}{3ab} : \frac{x-2y}{5cd}$; з) $\frac{2(a+3b)(x-y)}{5(b+2c)(3x-z)} : \frac{a+3b}{b+2c}$.

62. Найдите произведение дробей:

а) $\frac{1}{x^3} \cdot \frac{2}{x^4}$; б) $\frac{a}{b^4} \cdot \frac{c}{b^7}$; в) $\frac{2x^3}{3a^4} \cdot \frac{5x^7}{6a^8}$; г) $\frac{3a^3}{4x^3} \cdot \frac{7b^3}{8x^5}$.

63. Выполните умножение дробей:

а) $\frac{8c}{21d^2} \cdot \frac{7d}{6c^2}$; г) $3m \cdot \frac{n}{12m}$; ж) $8a^2b^4 \cdot \left(-\frac{3a}{4b^3}\right)$;

б) $\frac{x^4}{y^3} \cdot \frac{y^2}{x^3}$; д) $\frac{12xy}{25z} \cdot \frac{z^3}{8x^2}$; з) $-\frac{25x^4y^3}{14a^2} \cdot \left(-\frac{21ab}{10x^3y^2}\right)$;

в) $\frac{3ab}{4xy} \cdot \frac{10x^2}{21a^2b^3}$; е) $\frac{1}{x} \cdot y$; и) $\frac{9xy}{5ab} \cdot \frac{3ab}{4yz} \cdot \frac{4bz}{3axy}$.

64. Выполните указанные действия:

а) $5a : \frac{15a}{b}$; д) $\frac{2ax}{yz} : \frac{3bx}{ay} : \frac{9b^2z}{8a^2xy}$;

б) $\frac{6ab}{25c} : 8a^2$; е) $\left(\frac{8b^2cd}{9a^5} : \frac{7cd}{12a^3}\right) \cdot \frac{28a^4}{3b^2}$;

в) $16x^2y^3 : \left(-\frac{20x^5y^4}{3ab^2}\right)$; ж) $\frac{3p^2mq}{2a^2b^2} \cdot \frac{3abc}{8x^2y^2} : \frac{9a^2b^2c^3}{28pxy}$.

г) $-\frac{18a^2b^2}{5cd} : \frac{6ab^3}{5c^2d^4}$;

3. Сложение и вычитание дробей

Рассмотрим сначала сложение дробей с одинаковыми знаменателями. Пусть надо сложить дроби $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$, где $c \neq 0$. Положим $\frac{a}{c} = x$, $\frac{b}{c} = y$. Тогда имеем $a = cx$ и $b = cy$, а потому

$$a + b = cx + cy = c(x + y). \qquad (1)$$

Из равенства (1) следует, что $x + y = \frac{a+b}{c}$. Итак,

$$x + y = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \text{ и } x + y = \frac{a+b}{c}.$$

Поэтому

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Чтобы сложить две дроби с одинаковыми знаменателями, надо сумму их числителей записать в числитель, а знаменатель оставить без изменения.

Пример 1.

Сложим дроби $\frac{6x-y}{5y}$ и $-\frac{x+4y}{5y}$.

Решение.

$$\frac{6x-y}{5y} + \frac{-(x+4y)}{5y} = \frac{(6x-y)+(-(x+4y))}{5y} = \frac{6x-y-(x+4y)}{5y} =$$

$$= \frac{6x-y-x-4y}{5y} = \frac{5x-5y}{5y} = \frac{5(x-y)}{5y} = \frac{x-y}{y}.$$

Если знаменатели у дробей различны, то перед сложением дроби приводят к общему знаменателю. Так как $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ и $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$, то

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}. \qquad (2)$$

Лучше, однако, не пользоваться формулой (2), а каждый раз приводить дроби к общему знаменателю. Обычно в качестве общего знаменателя выбирают НОК знаменателей слагаемых.

Пример 2.

Сложим дроби $\frac{4a-5b}{ab}$ и $\frac{6c-7d}{cd}$.

Решение. НОК $(ab; cd) = abcd$ выберем в качестве общего знаменателя. Имеем $\frac{4a-5b}{ab} = \frac{(4a-5b)cd}{abcd}$ и $\frac{6c-7d}{cd} = \frac{(6c-7d)ab}{abcd}$.

Поэтому

$$\frac{4a-5b}{ab}+\frac{6c-7d}{cd}=\frac{(4a-5b)cd}{abcd}+\frac{(6c-7d)ab}{abcd}=$$

$$=\frac{(4a-5b)cd+(6c-7d)ab}{abcd}=\frac{4acd-5bcd+6abc-7abd}{abcd}.$$

Пример 3.

Сложим дроби $\frac{2x}{bc}$ и $\frac{3y}{ac}$.

Решение. НОК $(bc;\ ac)=abc$. Так как $abc:bc=a$, $abc:ac=b$

$\frac{2x}{bc}=\frac{2xa}{abc}$, $\frac{3y}{ac}=\frac{3yb}{abc}$, и потому $\frac{2x}{bc}+\frac{3y}{ac}=\frac{2ax}{abc}+\frac{3by}{abc}=\frac{2ax+3by}{abc}$.

Пример 4.

Найдем разность дробей $\frac{6x}{a^2b^4}$ и $\frac{7y}{a^3b}$.

Решение. Так как НОК $(a^2b^4;\ a^3b)=a^3b^4$ и $a^3b^4:a^2b^4$ $a^3b^4:a^3b=b^3$, то

$$\frac{6x}{a^2b^4}=\frac{6ax}{a^3b^4},\quad \frac{7y}{a^3b}=\frac{7b^3y}{a^3b^4},$$

и потому $$\frac{6x}{a^2b^4}-\frac{7y}{a^3b}=\frac{6ax}{a^3b^4}-\frac{7b^3y}{a^3b^4}=\frac{6ax-7b^3y}{a^3b^4}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

65. Выполните указанные действия:

а) $\frac{a}{5}+\frac{b}{5}$; г) $\frac{m}{12}+\frac{n-m}{12}$; ж) $\frac{a}{7}+\frac{2a}{7}$;

б) $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}$; д) $\frac{2c+7}{a}-\frac{7}{a}$; з) $\frac{x+3}{y}+\frac{2-x}{y}$;

в) $\frac{x+y}{9}-\frac{x}{9}$; е) $\frac{a}{b}+\frac{5c}{b}$; и) $\frac{6ab}{c}+\frac{7xy}{c}$.

66. Выполните указанные действия:

а) $\frac{x+5}{9}-\frac{x+2}{9}$; г) $\frac{5b+2c-7}{2b}-\frac{b+3}{2b}$;

б) $\frac{8x-3}{14}+\frac{24-x}{14}$; д) $\frac{a-2}{8}+\frac{2a+5}{8}-\frac{3-a}{8}$;

в) $\frac{5m+2n}{8n}-\frac{5m-3n}{8n}$; е) $\frac{3x-2y}{2x}+\frac{5x-3y}{2x}-\frac{x-4y}{2x}$;

ж) $\frac{5x+1}{a+b}-\frac{3x+4}{a+b}$;

з) $\frac{2y+8}{ab}-\frac{3y}{ab}+\frac{y+6}{ab}$;

и) $\frac{2a}{2a+3b}+\frac{2b}{2a+3b}$;

к) $\frac{ab}{b+c}+\frac{ac}{b+c}$.

67. Является ли тождеством равенство:

а) $\frac{5}{a-b}=-\frac{5}{b-a}$; б) $-\frac{3x-1}{2}=\frac{1-3x}{2}$?

68. Решите уравнение:

а) $\frac{3x-12}{17}+\frac{8-x}{17}=0$; б) $\frac{11y+29}{41}-\frac{8y-24}{41}=0$.

69. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{x}{y-1}+\frac{5}{1-y}$;

б) $\frac{a}{c-3}-\frac{b}{3-c}$;

в) $\frac{m}{m-n}+\frac{2n}{n-m}$;

г) $\frac{3p}{p-q}-\frac{2p}{q-p}$;

д) $\frac{a+1}{2a-1}+\frac{a-2}{1-2a}$;

е) $\frac{x+4}{1-3x}-\frac{8-2x}{3x-1}$;

ж) $\frac{y-3}{y-7}+\frac{3+y}{7-y}$;

з) $\frac{b-13}{10-b}-\frac{3+2b}{b-10}$.

70. Упростите выражение:

а) $\frac{p}{p-2}-\frac{5}{p-2}+\frac{2p}{p-2}$;

б) $\frac{a+3}{a-3}-\frac{2a-1}{3-a}+\frac{4a-1}{a-3}$;

в) $\frac{2a}{a-b}+\frac{a}{b-a}-\frac{b}{a-b}$;

г) $\frac{2a}{2a-9}+\frac{3-a}{9-2a}-\frac{a+6}{9-2a}$.

71. Решите уравнение:

а) $\frac{2x}{3x-9}-\frac{4x+1}{9-3x}+\frac{7-3x}{3x-9}=0$; б) $\frac{3x+15}{2x-10}+\frac{7-5x}{10-2x}-\frac{7x-2}{2x-10}=$

72. Вычислите значение выражения:

а) $\frac{3a+2b}{2a-b}+\frac{4a-b}{2a-b}+\frac{a+4b}{b-2a}$ при $a=2{,}718$, $b=3{,}142$;

б) $\frac{5x-3y}{4x-y}+\frac{7x+5y}{4x-y}+\frac{12x+y}{y-4x}$ при $x=\frac{1}{4}$, $y=3$.

73. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$;

б) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}$;

в) $\frac{p}{12}+\frac{q}{18}$;

г) $\frac{c}{21}-\frac{d}{6}$;

д) $\frac{3}{a}+\frac{5}{b}$;

е) $\frac{8}{x}-\frac{7}{y}$;

ж) $\frac{2}{3a}+\frac{3}{2a}$;

з) $\frac{5}{6x}-\frac{3}{4x}$;

и) $\frac{8x}{15}-\frac{3x}{10}$;

к) $\frac{5y}{12}+\frac{7y}{10}$;

л) $\frac{a+b}{3}-\frac{a-b}{2}$;

м) $\frac{ax}{3}+\frac{by}{5}$;

н) $\frac{1}{15a}+\frac{1}{9a}$;

о) $\frac{x}{5y}+\frac{3}{2y}$;

п) $\frac{b}{3a}-\frac{5}{2a}$.

74. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{3}{7n}-\frac{5}{28mn}$;

б) $\frac{5y-3}{3}+\frac{3y-2}{5}$;

в) $\frac{2x-5}{6}-\frac{x-4}{5}$;

г) $\frac{1}{6x}+\frac{1}{5x}-\frac{1}{15x}$;

д) $\frac{x-2}{2}+\frac{2x+3}{4}-\frac{5x-3}{6}$;

е) $\frac{2a-b}{6}-\frac{a-4b}{2}+\frac{2a-15b}{8}$.

75. Выполните указанные действия:

а) $\frac{3a}{b}+\frac{2x}{y}$;

б) $\frac{9x}{yz}-\frac{2x}{y}$;

в) $\frac{7x}{ab}+\frac{8y}{bc}$;

г) $\frac{25x}{bd}-\frac{18y}{ac}$;

д) $\frac{25ax}{b(c+d)}+\frac{18by}{b(x+y)}$;

е) $\frac{2a+c}{3x+y}-\frac{4a-c}{3x-y}$.

76. Выражение $x-5y$ представьте в виде дроби со знаменателем:

а) 1; б) 2; в) a; г) $5xy$.

77. Представьте сумму или разность в виде дроби:

а) $x+\frac{1}{a}$;

б) $b-\frac{a}{c}$;

в) $\frac{a+2b}{b}-3$;

г) $\frac{16x}{4x-7y}-4$;

д) $\frac{8y}{x-2y}+4$;

е) $\frac{10y}{x-2}+5y$.

78. Решите уравнение:

а) $\frac{2x-3}{5}-\frac{x+6}{4}=0$;

б) $\frac{5x-6}{3}-\frac{5x+6}{12}=0$;

в) $\frac{30-y}{9}-y=0$;

г) $x-\frac{x-12}{5}=0$;

д) $\frac{5x-8}{6}+\frac{2x-7}{9}-x=0$;

е) $\frac{x-9}{14}-\frac{8-3x}{28}+2=0$.

79. Выполните указанные действия:

а) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$;

б) $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y-x}$;

в) $\frac{a}{p-q}-\frac{a}{p+q}$;

г) $\frac{a+b}{p-q}+\frac{a-b}{p+q}$.

80. В знаменателе каждой дроби вынесите за скобки общий множитель, после чего сложите дроби:

а) $\frac{3}{2x-2y}+\frac{5}{3x-3y}$;

б) $\frac{1}{4a+4b}+\frac{1}{6a+6b}$;

в) $\frac{5y}{4y-2}-\frac{7y}{6y-3}$;

г) $\frac{3b}{5b+15}-\frac{b}{2b+6}$;

д) $\frac{2x}{ab+b}+\frac{3y}{ac+c}$;

е) $\frac{x}{ax+ay}+\frac{y}{bx+by}$.

81. Приведите к одному знаменателю дроби:

а) $\frac{2}{x^3}$ и $\frac{3}{x^8}$;

б) $\frac{a}{c^4}$ и $\frac{b}{c^{10}}$;

в) $\frac{4}{8a^5}$ и $\frac{5}{28a^2}$;

г) $\frac{17x}{24b^2}$ и $\frac{19}{45b^8}$.

82. Найдите сумму дробей:

а) $\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a^7}$; б) $\frac{c}{x^3}+\frac{d}{x^2}$; в) $\frac{ab}{y^6}-\frac{cd}{y^{12}}$; г) $\frac{ax^2}{z^5}+\frac{bx^3}{z^{10}}$.

83. Приведите к одному знаменателю:

а) $\frac{1}{c^2}$ и $\frac{1}{c^5}$; в) $\frac{3,2}{(a+b)^3}$ и $\frac{4,5}{(a+b)^8}$;

б) $\frac{z}{x^6}$ и $\frac{z}{x^4}$; г) $\frac{5,6}{(2x-14y)^{34}}$ и $\frac{3,9}{(2x-14y)^9}$.

84. Сложите дроби:

а) $\frac{3}{a^5}+\frac{2}{a^2}$; в) $\frac{4,8}{(x+y)^6}-\frac{2,5}{(x+y)^3}$;

б) $\frac{5}{x^8}-\frac{3,7}{x^4}$; г) $\frac{7,4}{(2x+5y)^{10}}+\frac{0,4}{(2x+5y)^8}$.

85. Выполните указанные действия:

а) $\frac{14a^2x^3}{9b^4y^3}-\frac{6b^3y^4}{5a^3x^2}$; в) $\frac{11a^2b^3c}{20x^2y^3z^3}+\frac{5ab^4c^3}{28xy^4z^2}$;

б) $\frac{9b^2}{5a^3x^2}+\frac{6c^3}{45a^4x}$; г) $\frac{15x^4y^5z}{7a^4bc^5}-\frac{16x^3y^2z^3}{27a^2b^5c^2}$.

86. Представьте дробь в виде суммы дробей:

а) $\frac{x^2+3x+2}{x^5}$; в) $\frac{x^6+7x^2+8x-5}{6x^4}$;

б) $\frac{x^3-7x+5}{3x^4}$; г) $\frac{x^{12}-5x^3+x-14}{9x^2}$.

6. ВОЗВЕДЕНИЕ ДРОБИ В СТЕПЕНЬ

Возведем дробь $\frac{3}{4}$ в пятую степень. По правилу умножения дробей получаем

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4}=\frac{3^5}{4^5}.$$

Точно так же получаем

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b}=\frac{a^5}{b^5}.$$

Вообще при возведении дроби в степень надо возвести в эту степень числитель и знаменатель и разделить степень числителя на степень знаменателя:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}. \qquad (1)$$

В самом деле,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{m\text{ раз}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m\text{ раз}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{m\text{ раз}}} = \frac{a^m}{b^m}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

87. Представьте степень в виде дроби:

а) $\left(\frac{x}{2y}\right)^3$; в) $\left(-\frac{3p}{q}\right)^3$; д) $\left(\frac{a^2b^3}{c^4}\right)^5$; ж) $\left(-\frac{2m^5}{p^4q^3}\right)^6$;

б) $\left(\frac{5a}{b}\right)^2$; г) $\left(-\frac{m}{7n}\right)^2$; е) $\left(\frac{x^3}{y^2z^2}\right)^4$; з) $\left(-\frac{a^8b^6}{c^4d^3}\right)^7$.

88. Представьте дробь в виде степени:

а) $\frac{4a^2b^6}{x^{10}}$; б) $\frac{64a^6}{b^{12}c^{24}}$; в) $\frac{-8a^6}{(a-b)^3}$; г) $\frac{-(x-4)^5}{32x^{10}}$.

89. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2a^8}{c^7}\right)^5\cdot\left(\frac{c^9}{4a^{10}}\right)^4$; г) $\left(\frac{6a^3x^2}{7b^2y^3}\right)^3:\left(\frac{3a^4x^3}{16b^3y^5}\right)^2$;

б) $\left(-\frac{3x^7}{a^{12}}\right)^4:\left(\frac{9x^5}{a^8}\right)^3$; д) $\left(\frac{3(a+2b)^4}{2(x-3y)^5}\right)^5\cdot\left(\frac{2(x-3y)^5}{3(a+2b)^4}\right)^3$;

в) $\left(\frac{8a^3}{9b^2}\right)^3\cdot\left(-\frac{27b^3}{16a^4}\right)^2$; е) $\left(\frac{(a+5b)^3(x-4y)^2}{(3a-2x)^4(2b+7y)^3}\right)^4$.

90. Выполните указанные действия:

а) $\left(\frac{7}{x^2}\right)^3+\left(\frac{6}{x^3}\right)^2$; в) $\left(\frac{b^2}{x^2y^3}\right)^2-\left(\frac{a}{x^3y^2}\right)^2$;

б) $\left(\frac{a^2}{y^3}\right)^3-\left(\frac{2a^3}{y^4}\right)^2$; г) $\left(\frac{a^4}{(x-3y)^2}\right)^3+\left(\frac{b^3}{(x-3y)^3}\right)^2$.

91. Приведите одночлен к стандартному виду:

а) $(3xy^3)^3$; г) $(-0{,}1p^2q^4)^3$; ж) $4a^2b^5(0{,}5ab^3)^3$;

б) $(5a^4b)^2$; д) $\left(-\frac{1}{5}m^6n^4\right)^2$; з) $\left(2\frac{1}{3}x^2y^3\right)^{10}\cdot\left(\frac{3}{7}x^5y^4\right)^{10}$

в) $(-a^2b)^5$; е) $(-2ab^2)^6$;

92. Представьте одночлен в виде куба одночлена:

а) $27a^3b^3$; в) $8a^9x^{15}$; д) $8a^9x^{15}\cdot(3a^3x^2)^6$;

б) $64a^6x^{12}$; г) $125a^{27}x^9y^{15}$; е) $(3ax^4)^{12}\cdot(2a^2x)^{15}$.

93. Упростите выражение:

а) $\left(-\frac{6a^3x^2}{7b^2y^3}\right)^3:\left(\frac{3a^4x^3}{14b^3y^5}\right)^2$;

в) $\left(\frac{3a^2c}{2x^3y^2}\right)^2\cdot\left(-\frac{6xy^4}{2ac^2}\right)^3$;

б) $\left(\frac{9b^4x^3}{5a^3z^5}\right)^4\cdot\left(\frac{25a^6z^9}{12b^7x^4}\right)^2$;

г) $\left(\frac{5a^3b^4}{-3x^5y^6}\right)^4:\left(-\frac{2a^4b^2}{15x^6y^8}\right)^3$.

94. Выполните указанные действия:

а) $\left(\frac{14a^2x^3}{9b^4y^3}\right)^2-\left(\frac{6b^3y^4}{5a^3x^2}\right)^3$;

в) $\left(\frac{11a^2b^3c}{20x^2y^3z^3}\right)^3+\left(\frac{5ab^4c^3}{28xy^4z^2}\right)^2$;

б) $\left(\frac{9b^2}{5a^3x^2}\right)^4+\left(\frac{6c^3}{45a^4x}\right)^2$;

г) $\left(\frac{15x^4y^5z}{7a^4bc^5}\right)^3-\left(\frac{16x^3y^2z^3}{27a^2b^5c^2}\right)^3$.

95. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2a^3c^2}{3x^2y}\right)^2\cdot\left(-\frac{2xy^4}{6ac^2}\right)^3$;

б) $\left(\frac{-3a^5b^6}{5x^3y^4}\right)^4:\left(\frac{-15a^6b^8}{2x^4y^2}\right)^3$.

7. ФУНКЦИЯ $y=\frac{k}{x}$

Из определения обратной пропорциональности величин вытекает, что если значению x_1 первой величины соответствует значение y_1 второй величины, а значению x_2 первой величины — значение y_2 второй величины, то имеет место равенство $x_1y_1=x_2y_2$. Значит, произведение соответствующих значений обратно пропорциональных величин постоянно. Обозначим это произведение через k. Тогда для соответствующих друг другу значений обратно пропорциональных величин выполняется равенство $xy=k$. Из него следует, что

$$y=\frac{k}{x}. \qquad (1)$$

Функцию (1) называют *обратно пропорциональной зависимостью переменных x и y.*

Пример 1.

Длины сторон прямоугольника, имеющего заданную площадь S, обратно пропорциональны друг другу. Произведение этих длин равно площади прямоугольника: $xy=S$.

Пример 2.

Количество товара y, имеющего данную стоимость k, обратно пропорционально его цене x. В этом случае выполняется равенство $xy=k$.

Из сказанного выше вытекает следующий признак обратной пропорциональности величин, значения которых найдены из опыта:

если при составлении произведений соответствующих друг др значений этих величин все они равны одному и тому же числу то имеем обратную пропорциональность по правилу $y = \frac{k}{x}$.

Пример 3.

Измерения давления газа p и его объема V при температуре дали следующие результаты:

p, кПа	3,6	1,8	1,2	0,9	0,72	0,6
V, м^3	1	2	3	4	5	6

Проверим, являются ли величины p и V обратно пропорциональны

Решение. Составим произведения соответствующих пар ве чин:

$$3{,}6 \cdot 1 = 3{,}6; \quad 1{,}8 \cdot 2 = 3{,}6; \quad 1{,}2 \cdot 3 = 3{,}6;$$
$$0{,}9 \cdot 4 = 3{,}6; \quad 0{,}72 \cdot 5 = 3{,}6; \quad 0{,}6 \cdot 6 = 3{,}6.$$

Все эти произведения равны одному и тому же числу. Знач давление газа и его объем обратно пропорциональны друг другу

УПРАЖНЕНИЯ

96. Пассажирский поезд, движущийся со скоростью 80 км/ч, про дит путь между городами A и B за 11 ч. За какое время прой тот же путь экспресс, движущийся со скоростью 120 км/ч?

97. Стог сена имеет объем 18 м^3. Какой объем займет это сено по прессования, если при этом плотность увеличится в 4 раза?

98. Пять комбайнов, работающих с одинаковой производительност могут убрать поле, засеянное пшеницей, за 7 суток. За какое в мя уберут это же поле 15 комбайнов, работающих с той же п изводительностью?

99. На путь по течению реки теплоход затратил 18 ч. Сколько вре ни потребуется ему на обратный путь, если собственная скоро теплохода равна 26 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч?

100. Начертите прямоугольники, имеющие площадь 24 см^2, помес одну из вершин прямоугольников в начало координат и напра стороны по осям координат.

101. Приведите примеры обратно пропорциональных величин, отл ные от приведенных выше.

102. Рабочий изготовил 96 деталей. Сколько часов (t) он работал, е за час он делает x деталей? Составьте таблицу зависимости t о для следующих значений x: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, Чему равен коэффициент обратной пропорциональности k?

103. Какие из следующих величин обратно пропорциональны, а какие прямо пропорциональны друг другу:
а) пройденный путь и скорость (при постоянном времени движения);
б) пройденный путь и время (при постоянной скорости движения);
в) время движения и его скорость (при постоянном пути);
г) площадь посева и урожайность (при данном урожае);
д) урожай и урожайность (при данной площади посева);
е) урожай и площадь посева (при данной урожайности);
ж) значение дроби и значение ее числителя (при данном знаменателе);
з) значение числителя дроби и значение ее знаменателя (при заданном значении дроби);
и) значение дроби и значение ее знаменателя (при данном значении числителя)?

104. p процентов от числа a равны x, т. е. $x = \frac{ap}{100}$. Укажите, какие пары величин p, a, x прямо пропорциональны друг другу, а какие обратно пропорциональны (при постоянном значении третьей величины).

8. ГРАФИК ОБРАТНОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

Если площадь прямоугольника равна 1 дм^2, то длины x и y его сторон обратно пропорциональны друг дугу. Начертим график этой обратной пропорциональности. Для этого составим таблицу значений y и x, связанных равенством $y = \frac{1}{x}$, если x принимает значения

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Изобразим на координатной плоскости точки $M_1\left(\frac{1}{4};\ 4\right)$, $M_2\left(\frac{1}{3};\ 3\right)$, $M_3\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$, $M_4(1;\ 1)$, $M_5\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$, $M_6\left(3;\ \frac{1}{3}\right)$, $M_7\left(4;\ \frac{1}{4}\right)$ и соединим их плавной линией (рис. 1). Ясно, что при дальнейшем увеличении x значения y будут приближаться к нулю, т. е. расстояние от точки графика до оси абсцисс будет становиться сколь угодно малым.

Например, при $x = 1000$ имеем $y = 0{,}001$, а при $x = 1\,000\,000$ имеем $y = 0{,}000001$. Если же приближать x к нулю, оставляя значения x положительными, то значения y будут становиться сколь угодно большими. Например, при $x = 0{,}001$ имеем $y = 1000$, а при $x = 0{,}000001$ имеем $y = 1\,000\,000$.

Таким образом, по мере увеличения положительных значений x график функции $y=\frac{1}{x}$ неограниченно приближается к оси абсцисс, а по мере приближения x к нулю этот график неограниченно поднимается вверх, приближаясь к оси ординат. В таких случаях говорят, что оси координат являются **асимптотами** графика функции $y=\frac{1}{x}$.

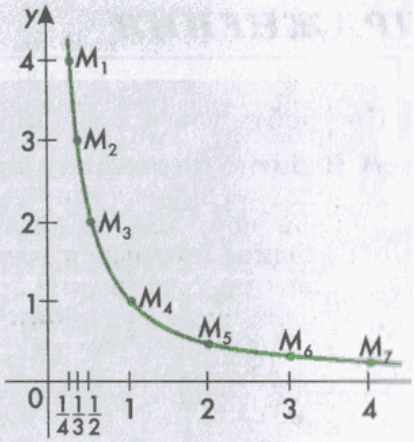


Рис. 1

Если на графике функции $y=\frac{1}{x}$ лежит точка $A(a;\ b)$, то на нем лежит и точка $B(-a;\ -b)$, симметричная A относительно начала координат $\left(\text{если } b=\frac{1}{a},\ \text{то } -b=\frac{1}{-a}\right)$.

График функции $y=\frac{1}{x}$ симметричен относительно начала координат. Он изображен на рисунке 2. Похожий вид имеет график любой функции $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$. Такой график всегда лежит в первой и третьей четвертях координатной плоскости.

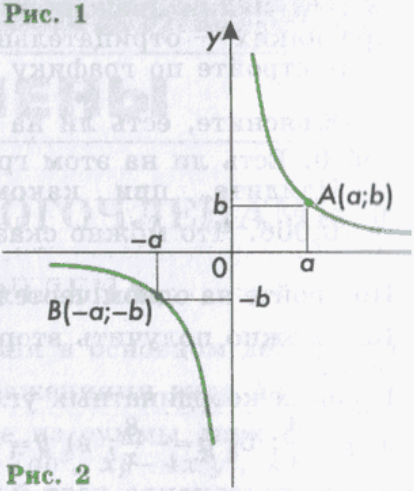


Рис. 2

Если же коэффициент k для функции $y=\frac{k}{x}$ отрицателен, то положительным значениям x соответствуют отрицательные значения y и, наоборот, отрицательным значениям x соответствуют положительные значения y. Поэтому график функции $y=\frac{k}{x}$ при $k<0$ располагается во втором и четвертом координатных углах (рис. 3).

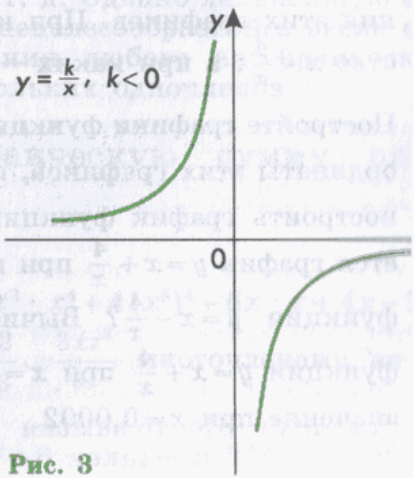


Рис. 3

Кривую, заданную уравнением $y=\frac{k}{x}$, называют *гиперболой*. Она, как видим, состоит из двух ветвей, которые по мере удаления точек от начала координат неограниченно приближаются к своим асимптотам — осям координат.

УПРАЖНЕНИЯ

105. Постройте график функции $y=\frac{6}{x}$.

а) Найдите по графику значения y, соответствующие значениям x, равным -4; -3; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; 2; 8.

б) Найдите по графику значения x, соответствующие значениям y, равным -4; -3; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; 2; 8.

в) На графике $y=\frac{6}{x}$ есть точка $A(2;\ 3)$. Какие еще точки этого графика можно указать без вычислений? Как расположены эти точки?

г) При каких значениях x значения функции положительны, а при каких — отрицательны?

д) Постройте по графику функции $y=\frac{6}{x}$ график функции $y=-\frac{6}{x}$.

е) Объясните, есть ли на графике функции $y=\frac{6}{x}$ точка с абсциссой 0. Есть ли на этом графике точка с ординатой 0?

ж) Найдите, при каком значении x выполняется условие $\frac{6}{x}=0{,}006$. Что можно сказать о значении x, если $x>0$ и $\frac{6}{x}>6000$?

106. Постройте на одном чертеже графики функций $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $y=-\frac{3}{x}$. Как можно получить второй график из первого? А третий из второго?

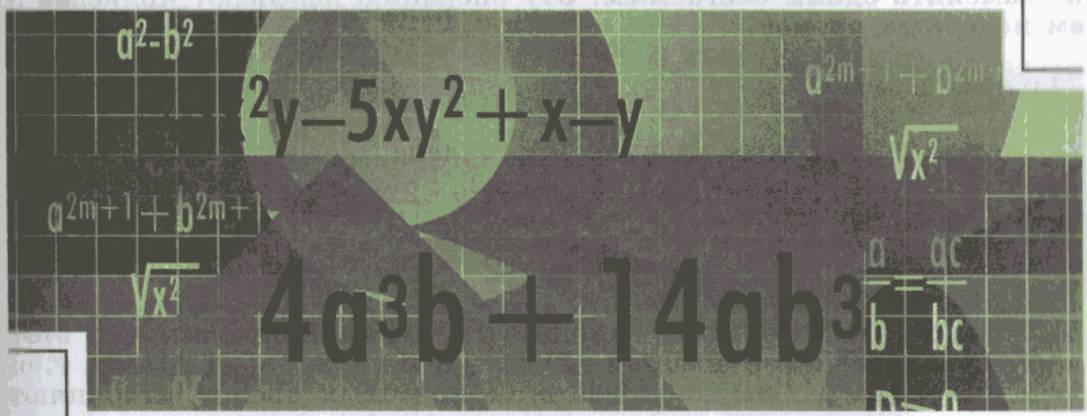
107. В каких координатных углах лежат графики следующих функций:

а) $y=\frac{4}{x}$; б) $y=-\frac{8}{x}$; в) $y=\frac{0{,}1}{x}$; г) $y=\frac{-0{,}3}{x}$?

108. Постройте графики функций $y=x$ и $y=\frac{4}{x}$. Найдите точки пересечения этих графиков. При каких значениях x выполняется неравенство $x<\frac{4}{x}$, а при каких — неравенство $x>\frac{4}{x}$?

109. Постройте графики функций $y=x$ и $y=\frac{4}{x}$. Сложив соответствующие ординаты этих графиков, постройте график функции $y=x+\frac{4}{x}$. Как построить график функции $y=x-\frac{4}{x}$? К какой прямой приближается график $y=x+\frac{4}{x}$ при неограниченном увеличении x? А график функции $y=x-\frac{4}{x}$? Вычислите с точностью до 0,001 значение функции $y=x+\frac{4}{x}$ при $x=4831$. Вычислите с той же точностью ее значение при $x=0{,}0002$.

Глава II



МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1. ОПЕРАЦИИ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ

1. СТАНДАРТНЫЙ ВИД МНОГОЧЛЕНА

В предыдущей главе мы рассматривали в основном действия с одночленами, т. е. с алгебраическими выражениями вида $4a^3b^2$, $\frac{1}{3}a^2xy^4$, $-2{,}1x^2ab$ и т. д. Выражения, состоящие из суммы двух одночленов, называют двучленами. Например, a^2b+7ab^3, $xy-4x^2y^3$, $kx+b$ — двучлены. Если выражение является суммой трех одночленов, его называют трехчленом, например $a+ab+b^2$ и т. д. Однако дальнейшую аналогию названий математики посчитали нецелесообразной и ввели единый термин **многочлен** для обозначения любого алгебраического выражения, состоящего из суммы нескольких одночленов.

Многочленом называют алгебраическую сумму одночленов.

Например,

$3x^2y-5xy^2+x-y$, $x^3+y^3+z^3-3xyz$, $x^2\cdot x^4+4(x^3)^4+6x\cdot x+4x-1$ — многочлены, а выражения $(x+y)^4$, $\frac{x^3+2}{y^4-3}$, $\frac{3xz^3}{5t}$ многочленами не являются.

Слагаемые, входящие в многочлен, называют его *членами*. Например, членами многочлена $2x^2y-3xy^2+6$ являются $2x^2y$, $-3xy^2$, 6.

Среди членов многочлена могут быть **подобные**, т. е. отличающиеся друг от друга лишь коэффициентами. Сумму таких членов можно заменить одним слагаемым. Эту операцию называют **приведением подобных членов.**

Пример 1.

Приведем подобные члены в многочлене

$$4x^2y^2-6xy^3+2x^2y^2-5x^3y+2xy^3+x^3y.$$

Решение. Запишем многочлен в виде

$$4x^2y^2+2x^2y^2-6xy^3+2xy^3-5x^3y+x^3y.$$

По распределительному закону умножения получаем, что этот многочлен равен многочлену $(4+2)x^2y^2+(-6+2)xy^3+(-5+1)x^3y$, т. е. $6x^2y^2-4xy^3-4x^3y$. Обычно приведение подобных членов выполняют устно и сразу пишут:

$$\underline{4x^2y^2}\ \underline{\underline{-6xy^3}}+\underline{2x^2y^2}\ \underline{\sim 5x^3y\sim}+\underline{\underline{2xy^3}}+\underline{x^3y\sim}=6x^2y^2-4xy^3-4x^3y.$$

Многочлен имеет ***стандартный вид***, если:
а) **все его члены имеют стандартный вид;**
б) **среди его членов нет подобных.**
Чтобы привести многочлен к стандартному виду, надо сначала привести к стандартному виду все его члены, а потом привести подобные члены.

Пример 2.

Приведем к стандартному виду многочлен

$$-a^3b+9ab\cdot b^2+5a\cdot a^2b-3ab^2\cdot b+8ab^3.$$

Решение. Так как $9ab\cdot b^2=9ab^3$; $5a\cdot a^2b=5a^3b$; $-3ab^2\cdot b=-3ab^3$, то данный многочлен тождественно равен многочлену

$$-a^3b+9ab^3+5a^3b-3ab^3+8ab^3.$$

Приводя подобные члены, получаем стандартный вид заданного многочлена:

$$4a^3b+14ab^3.$$

Два тождественно равных многочлена стандартного вида могут отличаться друг от друга лишь порядком слагаемых. Доказательство этого утверждения будет дано в старших классах. Если в многочлен входит лишь одна переменная, то его слагаемые располагают в порядке убывания показателей степеней этой переменной.
Расположенные по убыванию показателей многочлены тождественно равны лишь при условии, что их стандартные записи совпадают.
Член с наибольшей степенью называют *старшим* членом многочлена.

Пример 3.

Докажем, что многочлены

$$0{,}7x^2y \cdot xy^3 - 0{,}2xy^3 \cdot x^2y + 5x^2y^2 \cdot 0{,}2x^2y - 8xy^3 \cdot \frac{1}{4}x^3$$

и

$$1{,}6x \cdot 0{,}5x^3y^3 - 6x^3y^2 \cdot 0{,}3xy + 5x^2y^3 \cdot 0{,}3xy - 8x^3y^3 \cdot \frac{1}{8}y$$

тождественно равны.

Решение. Приведем оба многочлена к стандартному виду:

$$0{,}7x^2y \cdot xy^3 - 0{,}2xy^3 \cdot x^2y + 5x^2y^2 \cdot 0{,}2x^2y - 8xy^3 \cdot \frac{1}{4}x^3 =$$
$$= 0{,}7x^3y^4 - 0{,}2x^3y^4 + x^4y^3 - 2x^4y^3 = 0{,}5x^3y^4 - x^4y^3,$$

$$1{,}6x \cdot 0{,}5x^3y^3 - 6x^3y^2 \cdot 0{,}3xy + 5x^2y^3 \cdot 0{,}3xy - 8x^3y^3 \cdot \frac{1}{8}y =$$
$$= 0{,}8x^4y^3 - 1{,}8x^4y^3 + 1{,}5x^3y^4 - x^3y^4 = -x^4y^3 + 0{,}5x^3y^4.$$

Так как получившиеся многочлены отличаются друг от друга лишь порядком слагаемых, то они тождественно равны.

Пример 4.

Найдем старший член многочлена $2(x^3)^2 - 3(x^4)^5 \cdot x^2 + 4(x^2)^3 \cdot x^4$.

Решение. Сначала приводим многочлен к стандартному виду и располагаем его члены в порядке убывания показателей степеней:

$$2x^6 - 3x^{22} + 4x^{10} = -3x^{22} + 4x^{10} + 2x^6.$$

Старшим членом является $-3x^{22}$.

Наибольшую из степеней входящих в данный многочлен слагаемых называют *степенью* этого многочлена. (Напомним, что степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех входящих в него переменных.) Например, степень многочлена $3a^4b^2 - 6a^3b + 7ab^4 - 5a^2b$ равна 6 — такую степень имеет слагаемое $3a^4b^2$, а степени остальных слагаемых меньше, чем 6. Если степени всех членов многочлена одинаковы, то этот многочлен называют *однородным*. Например, $x^4 + 2x^3y - 6x^2y^2 + 3y^4$ — однородный многочлен степени 4, а многочлен $x^4 + 2x^3y - 6x^2y^2 + 3y^4 - 5$ не является однородным, так как один из его членов (-5) имеет степень 0.

Многочлены принято обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, P, Q, R и т. д. Иногда указывают переменные, входящие в этот многочлен. Например, $P(a, b) = 3a^4b^2 - 6a^3b + 7ab^4 - 5a^2b + 9$ или $Q(x, y) = x^2y - 3xy + 1$.

Многочлены, содержащие одну переменную, часто обозначают $A_n(x)$, $P_n(x)$ и т. д., где n — степень многочлена, и говорят: **«Многочлен n-й степени»** (иногда говорят: «Полином n-го порядка»)*.

*) «Полином» от греческого слова polys — многий, многочисленный.

Произвольный многочлен n-й степени в стандартном виде, содержащий одну переменную, записывают так:

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

где a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n — произвольные числа, называемые коэффициентами многочлена.

Многочлен второй степени $P_2(x)=ax^2+bx+c$, где a, b, c — произвольные числа и $a\neq 0$, обычно называют *квадратным трехчленом*, а числа a, b, c — коэффициентами квадратного трехчлена.

Заметим, что *два многочлена n-й степени $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ тождественно равны лишь в том случае, если их коэффициенты при одинаковых степенях переменной равны.*

Пример 5.

Найдем, при каком условии многочлены $P_3(x)=x^3+7x+c$ и $Q_3(x)=x^3+ax^2-bx$ тождественно равны.

Решение. Многочлены $P_3(x)=x^3+0\cdot x^2+7\cdot x+c$ и $Q_3(x)=x^3+ax^2-bx+0$ тождественно равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях x. Коэффициенты при x^3 у них равны 1. Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1 и x^0, получим $a=0$, $-b=7$, $c=0$. Итак, $P_3(x)$ и $Q_3(x)$ тождественно равны при условии $a=0$, $b=-7$, $c=0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Назовите каждое слагаемое суммы и найдите степень многочлена:

а) $2x^2-8x-7$;
б) $5a^2+8a^3\cdot 3b-0{,}2a^2b$;
в) $-0{,}25x^2-2xy+8y^3$;
г) $19x^2y\cdot 6xy-1{,}6xy^4\cdot 10x^5y+6x^7y^3\cdot x^2y^2$.

2. Составьте из данных одночленов многочлен:

а) $-2a^2$; $\frac{3}{8}a^4$; $-5a$;
б) $5x^3y$; $4{,}7xy^3$; $-2\frac{5}{9}x^4y^2$; $-3y^4$.

3. Какие из следующих выражений являются многочленами:

а) $2c^3-8c+11$;
б) $(4p^2-q)(4q^2-p)$;
в) $y+\frac{y}{x}+1$;
г) $9x^2y\cdot 6xy-3xy^5$;
д) $-\frac{2}{5}x^2-x$;
е) $\frac{x^2-2x-3}{x}$;
ж) $a(a-b)+5b^2$;
з) $(5x-3y)^{11}$?

4. Назовите одночлены, из которых составлен многочлен:

а) $4x^2-3x+6$;
б) $-2x^2+3x+1$;
в) $-3+0{,}5x+x^3$;
г) $5p^2-2pq+3q^3$;
д) $7a^2-\frac{1}{3}b-\frac{2}{5}c$;
е) x^2-2x^2-3x+4.

5. Являются ли многочленами следующие суммы:

а) $0{,}9a^2b(a+b)+6{,}1ab^2(a-b)$;
б) $2a^3x\cdot ax^3-3ax^7\cdot 0{,}2a^2x$;
в) $7{,}3x^2y^4-0{,}01xy^5-6{,}2xy^7\cdot 0{,}2x^3y$;
г) $(x+y)^3-3(x+y)^2+3(x+y)-1$?

6. Приведите подобные члены в многочлене:

а) $3x^4-5x+7x^2-8x^4+5x$;
б) $2a^3+a^2-1-3a^2+a^3-a$;
в) $12ab^2-b^3-6ab^2+3a^2b-5ab^2+2b^3$;
г) $2a^2x^3-ax^3-a^4+3x^4-2a^2x^3+ax^3+2a^4$.

7. Составьте таблицу значений многочлена $P_3(x)=2x^3+7x-5$ для значений x, равных -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3.

8. Составьте таблицу значений многочлена

$$P(x,\ y)=3x^2y-3xy^2+5x-5y+1,$$

когда x и y принимают значения -2, -1, 0, 1, 2.

9. Приведите к стандартному виду многочлен:

а) $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x+6x\cdot x\cdot x-3x\cdot x\cdot x\cdot x-12x\cdot x+5-7x$;
б) $2a(-3b)-7a^2\cdot 5b+6b^2\cdot 2a$;
в) $5x\cdot x\cdot(-3xy)+6y\cdot y\cdot x\cdot y-1$;
г) $a-0{,}5a^2(-2a)+0{,}2a(-5a)$.

10. Приведите к стандартному виду многочлен:

а) $-8p^2+2{,}2p^4-4p^4+8p^2-2{,}2p^4+3{,}7p^4$;
б) $2{,}4a^5-10a^2b+7a^2b-2{,}4a^5+3a^2b$;
в) $-5x^2y+3x^2y-6x^2y+4x^2y-7x^2y+1$;
г) $-a^2b+9ab^2+5a^2b-3ab^2+ab^2-5{,}1a^2b$.

11. Найдите значение многочлена:

а) $P(x,\ y)=-2xy+4x+11xy^2$, если $x=2\frac{3}{4}$, $y=-\frac{1}{7}$;
б) $Q(a,\ b)=-0{,}08b+7{,}3a^2b+27a^2b$, если $a=0{,}2$, $b=4$;
в) $R(a,\ b,\ c)=100a+10b+c$, если $a=8$, $b=4$, $c=1$;
г) $A(a,\ b)=9a^3b^2-3a^2b\cdot ab+70ab^2\cdot 0{,}1a^2$, если $a=2$, $b=3$.

12. Расположите члены многочлена в порядке убывания показателей степени и назовите его старший член:

а) $2y^3+5y-7y^4-y^6+3y^2-5$;
б) $x^3-4x+7x^2-8x^4-3$;
в) $(4a^2)^4\cdot a^3-(3a^3)^3\cdot a^5+7(a^2)^8\cdot a$;
г) $(5x^4)^2-3(x^4)^2\cdot x+(4x^5\cdot x^2)^2$.

13. В одном баке было 46 л машинного масла, в другом — 72 л. Из первого бака ежедневно расходовали по 3 л масла, из второго — по 5 л. Через сколько дней во втором баке останется машинного масла в 1,5 раза больше, чем в первом?

14. В одной силосной яме было 62 т силоса, а в другой — 50 т. Когда из первой ямы взяли силоса втрое больше, чем из второй, то в ней осталось силоса на 2 т больше, чем во второй. Сколько тонн силоса взяли из каждой ямы?

При сложении, вычитании, умножении и делении двух многочленов получаются выражения, которые не являются многочленами. Например,

$$(x^2+4y^2)+(x-3y^2);\ (x^2+4y^2)-(x-3y^2);$$
$$(x^2+4y^2)\cdot(x-3y^2);\ (x^2+4y^2):(x-3y^2)$$

(выражение $(x^2+4y^2)+(x-3y^2)$ не является многочленом, так как это сумма многочленов, а не сумма одночленов). Однако сумма, разность и произведение двух многочленов тождественно равны некоторым многочленам. Поэтому будем говорить «сложить, вычесть, умножить два многочлена», подразумевая, что для получения ответа следует соответствующее выражение заменить тождественно равным ему многочленом стандартного вида.

Начнем со сложения и вычитания многочленов. Если в сумме или разности многочленов раскрыть скобки, получится многочлен. Остается лишь привести его к стандартному виду.

Пример 1.

Сложим многочлены $5a^2b+2ab^2$ и $3a^2b-4ab^2$.

Решение. $(5a^2b+2ab^2)+(3a^2b-4ab^2)=5a^2b+2ab^2+3a^2b-4ab^2=$
$=8a^2b-2ab^2$.

Пример 2.

Вычтем из многочлена $5a^2b+2ab^2$ многочлен $3a^2b-4ab^2$.

Решение. $(5a^2b+2ab^2)-(3a^2b-4ab^2)=5a^2b+2ab^2-3a^2b+4ab^2=$
$=2a^2b+6ab^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

15. Выполните указанные действия над многочленами:

а) $(1{,}2x-3{,}5y+2)-(0{,}2x-2{,}5y+3)$;
б) $(3a^2-5a)+(1+5a-2a^2)$;
в) $(x^2+2x^4)+(-x^3-2x^4+5x)$;
г) $2{,}7p^5-(4p^3-2{,}3p^5+1)$;
д) $(8n^3-3n^2)-(7-8n-2n^2)$;
е) $(15a^2b-7ab^2-6b^3)+(2a^3-12a^2b+7ab^2)$.

16. Решите уравнение:

а) $(17-5x)-(3x-11)=4$; б) $(-10{,}5x-15{,}8)=12{,}8-0{,}7x$.

17. Найдите значение выражения:

а) $(5{,}7a^2b-3{,}1ab+8b^3)-(16{,}9ab-2{,}3a^2b+8b^3)$, если $a=-2$, $b=5$;
б) $5x^2-(3xy-7x^2)+(15xy-12x^2)$, если $x=0{,}25$, $y=0{,}4$.

18. Докажите тождество:

а) $x(x-y)+y(y-z)+x(x+y)+y(z+y)=2x^2+2y^2$;
б) $(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)=a^2+b^2+c^2$.

19. Даны три многочлена:

$A=2a^2-b^2+ab$, $B=2a^2+3ab+2b^2$, $C=-4a^2+2ab-3b^2$. Найдите $A+B+C$ при $a=491{,}5$ и $b=4$.

20. Каким многочленом надо заменить букву k, чтобы получилось тождество в следующих примерах:

а) $k+(12c^4-15c^2+6)=0$;
б) $k+(5x^2-2xy)=6x^2+9xy-y^2$?

21. Докажите, что значение выражения

$$\left(\frac{3}{5}x^2-0{,}4xy-1{,}5y+1\right)-\left(y^2-\frac{2}{5}xy+0{,}6x^2\right)$$

не зависит от значения x.

22. Найдите значение выражения

$$(7a^3-6a^2b+5ab^2-4b^3)+(5a^3+7a^2b+3ab^2-9b^3)-(10a^3+a^2b+8ab^2-13b^3)$$

при $a=2{,}1$.

23. Докажите, что:

а) сумма трех последовательных целых чисел делится на 3;
б) сумма пяти последовательных целых чисел делится на 5.

24. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $(7x^4-8x^3+9x^2-10x+11)-(5x^4-2x^3-7x^2-3x-6)-(x^4-2x^2-7x+17)$;
б) $(5a^3-4a^2-7a+10)-(3a^3+5a^2-13a+2)+(-a^3+8a^2-2a-9)-(a^3-7a^2+12a-1)$.

25. Из равенства $(5a^3-5a+b)-M=4b$ найдите, чему равен многочлен M.

26. Найдите многочлен k из условия $k-(x^2+2x-1)=1$.

27. Упростите:

а) $12{,}5x^2+y^2-(8x^2-5y^2-(-10x^2+6y^2))$;
б) $0{,}6ab^2+(2a^3+b^3-3ab+(a^3+2{,}4ab^2-b^3))$.

28. В автобусе было h пассажиров. На первых двух остановках вышло по m человек на каждой остановке, а на третьей никто не вышел, но вошло несколько человек, после чего в автобусе стало k пассажиров. Сколько человек вошло в автобус на третьей остановке?

3. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

По распределительному свойству умножения справедливо тождество

$$(a+b)t=at+bt.$$

Такое же тождество верно при любом количестве слагаемых, например

$$(a+b+c)t=at+bt+ct. \qquad (1)$$

Если заменить в таких тождествах переменные одночленами, то получим произведение многочлена на одночлен. Например, при $a=2x^2$, $b=-4y^2$, $c=3xy$, $t=5x^3y^2$ получаем

$$(2x^2-4y^2+3xy)\cdot 5x^3y^2=2x^2\cdot 5x^3y^2-4y^2\cdot 5x^3y^2+3xy\cdot 5x^3y^2=$$
$$=10x^5y^2-20x^3y^4+15x^4y^3.$$

Вообще, чтобы умножить многочлен на одночлен, надо умножить на этот одночлен все члены многочлена и полученные произведения сложить. После этого следует привести полученный многочлен к стандартному виду.

УПРАЖНЕНИЯ

29. Преобразуйте произведение в многочлен:

а) $2x^3\cdot(x^2+x+1)$;

б) $4b^2\cdot(5b^3-3b^2+2)$;

в) $-3a^4\cdot\left(\frac{1}{3}a^2-6a-5\right)$;

г) $(y^2-7y+6)\cdot 9{,}5y$;

д) $\frac{1}{2}ab\cdot\left(\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{4}ab+\frac{4}{3}b^2\right)$;

е) $\left(-2a^3b^3+\frac{3}{4}b^2c^2-7ac\right)\cdot\frac{4}{7}abc^2$.

30. Представьте выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $y^3-\frac{1}{2}y(y^2-5y+7)$;

б) $8a^4-3a^3(a^2+2a-1)$;

в) $5x(a-3x+1)-4x(a-4x-3)$;

г) $6ab(ab-b^2)-3a^4(a^2-b^2)+5b^2(a^2-ab)$.

31. Выполните умножение:

а) $17a(a+b+c)$;

б) $7ab(2a+3b)$;

в) $15a^2b(15b+3)$;

г) $3x^2(5a+6b+7ab)$;

д) $12p^2q(q^2p-q^2)$;

е) $xyz(x^2+2y^2+3z^2)$;

ж) $\left(\frac{1}{2}a^3b^2-\frac{3}{4}ab^4\right)\cdot\frac{4}{3}a^2b$;

з) $\left(\frac{2}{3}x^2y^4+\frac{1}{2}x^3y\right)\cdot\frac{3}{4}xy^3$;

и) $\left(1\frac{4}{7}a^3x^2-2\frac{3}{4}a^2x^4\right)\cdot\left(-2\frac{6}{11}ax^6\right)$;

к) $\left(-2\frac{1}{22}b^4y^5\right)\cdot\left(-2\frac{4}{9}b^6y+2\frac{1}{5}b^3y^2-11by^5\right)$.

32. Упростите выражение:

а) $5(a-b)-4(2a-3b)$;
б) $(x^2-1)\cdot 3x-(x^2-2)\cdot 2x$;
в) $6(2t-3n)-3(3t-2n)$;
г) $(x^3-3x+4)\cdot 5x-(2x^2+5x-8)\cdot 3x$;
д) $(x^4-6x^2+1)\cdot 3x^2-(2x^4+7x^2-6)\cdot 4x^2$;
е) $-2x^2y(3x-2y)-5xy^2(2y-3x)$;
ж) $8p^2(p-3)-4p\cdot p\cdot p-5p^2\cdot p+(p^3+4p)$;
з) $(4a\cdot a-3b\cdot b)\cdot 2a-(3a\cdot a+4b\cdot b)\cdot 3a$;
и) $7p\cdot p\cdot p+(p+5)\cdot p^2\cdot 4-10p\cdot p$;
к) $8t\cdot t\cdot t\cdot t+6t^2\cdot t^2-(7t^3+1)\cdot 4t$.

33. Найдите значение выражения:

а) $5a(a-4b)-4b(b-5a)$ при $a=-0{,}6$, $b=-0{,}75$;
б) $x(x+y+1)-y(y+1-x)$ при $x=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$.

34. Докажите тождество:

а) $5(4x^2-2x+1)-2(10x^2-5x-2{,}5)=10$;
б) $-5(12x^4y^4-3x^4y-8)+7{,}5x^4y(8y^3-2)=40$.

35. Докажите, что выражение принимает одно и то же значение при всех значениях переменных:

а) $a(2a+1)-a^2(a+2)+a^3-a+3$;
б) $4(c-1)-c^2(2+3c)+c(5c-4)+3c^2(c-1)$.

36. Решите уравнение:

а) $5x(12x-7)-4x(15x-11)=30+29x$;
б) $24x-6x(13x-9)=-13-13x(6x-1)$;
в) $\frac{2}{5}(3x+1)-\frac{5}{7}(x-1)=x-3$;
г) $1{,}1(15-x)-1{,}7(9-x)=x+6$.

37. Расстояние между совхозом и городом, равное 170 км, мотоциклист проехал за 5 ч. Первые 2 ч он ехал со скоростью на 10 км/ч большей, чем скорость на оставшейся части пути. Определите скорости на первой и второй части пути.

38. Два грузовика грузоподъемностью 5 т и 3 т перевезли 100 т груза. Сколько рейсов сделал каждый грузовик, если всего было 26 рейсов?

4. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Если все члены многочлена делятся на данный одночлен, то частное от деления этого многочлена на одночлен приводится к виду многочлена. Для этого надо разделить каждый член многочлена на одночлен и привести частные к стандартному виду.

Пример 1.

Приведем к виду многочлена частное $(8x^4y^2-5x^3y^3+7xy^5):9xy^2$.

Решение. $(8x^4y^2-5x^3y^3+7xy^5):9xy^2=\frac{8x^4y^2}{9xy^2}-\frac{5x^3y^3}{9xy^2}+\frac{7xy^5}{9xy^2}=$
$=\frac{8}{9}x^3-\frac{5}{9}x^2y+\frac{7}{9}y^3$.

Если некоторые члены многочлена не делятся на одночлен, то при делении получится сумма, у которой некоторые слагаемые — дроби.

Пример 2.

Разделим многочлен $9xy^3+5x^2y+4$ на одночлен $3xy^2$.

Решение. $(9xy^3+5x^2y+4):3xy^2=\frac{9xy^3}{3xy^2}+\frac{5x^2y}{3xy^2}+\frac{4}{3xy^2}=3y+\frac{5x}{3y}+\frac{4}{3xy^2}$.

УПРАЖНЕНИЯ

39. Выполните деление:

а) $(6a-8b+10):9$;
б) $(8x+12y-16):(-4)$;
в) $(14m-28n+7):(-7)$;
г) $(0{,}8x^6+0{,}5x^4-3x^3):0{,}2x^2$;
д) $(3a^3b-4ab^3):5ab$;
е) $(2c^5d^4+3c^4d^3):(-3c^4d^3)$.

40. Разделите многочлен на одночлен:

а) $(8x^6-7x^3-14x^2):2x$;
б) $(15a^{10}-6a^3+3a^2):9a^2$;
в) $(3x^2y^5-0{,}75x^4y^2+9{,}3x^4y^3):9x^2y^2$;
г) $(2x^{m+4}-3x^{m+2}+5x^{m+1}):2x^{m+1}$.

41. Замените многочленом стандартного вида:

а) $\left(\frac{1}{2}a^3b+\frac{1}{3}a^2b-\frac{1}{4}ab^3\right):5ab$;
б) $\left(-\frac{2}{3}x^5y^2+\frac{3}{4}x^4y^3-\frac{4}{5}x^3y^4\right):(-6x^2y^2)$;
в) $(0{,}01a^4-0{,}02a^3-0{,}04a^2+0{,}002a):0{,}01a$;
г) $\left(\frac{3}{4}a^6x^3+\frac{6}{5}a^3x^4-\frac{9}{10}ax^5\right):\frac{3}{5}ax^3$;
д) $(5x^{m+7}-0{,}2x^{m+6}):0{,}2x^{m+3}$;
е) $(3x^{k+6}y^{m+5}-2x^{k+4}y^{m+2}):6x^ky^m$.

42. Упростите выражение:

а) $(0{,}7x^6-0{,}5x^5+0{,}9x^4-0{,}7x^2):0{,}1x^2-(14x^4-10x^2)\cdot 0{,}5x^2$;
б) $(3{,}6a^3b^5-4{,}5a^2b^6):0{,}9a^2b^3+(2{,}1a^4b^6+3{,}5a^3b^7)\cdot 0{,}7a^3b^4$.

43. Замените звездочки одночленами так, чтобы получилось тождество:

а) $*\cdot(4b^2-7b+8)=28b^3-49b^2+56b$;
б) $*\cdot(3y^2+8y-7)=36y^5+**$;

в) $*\cdot(3x^2-10x-*)=24x^6-*-40x^4$;
г) $5a^2b^3\cdot(*-9b^2+*)=20a^5b^7-*+a^4b^9$.

44. Представьте выражение в виде суммы:
а) $(x^4-3x^3+4x^2-3x+1):6x^2$;
б) $(7x^2y^2+9x^3y+18y^4):9x^2y^2$;
в) $(0{,}36a^3x^2-0{,}72a^2x^4+0{,}84ax^5):0{,}6a^3x^4$;
г) $\left(\frac{7}{8}a^5b^3-\frac{5}{9}a^4b^7+\frac{3}{11}a^6b^2\right):\frac{2}{9}a^8b^9$.

45. Найдите значение выражения $(10x^5-15x^4):5x^4$ при $x=4$.

46. Найдите значение выражения $(4y^7-y^6):y^6-15y^8:2y^7$ при $y=3{,}1$.

47. Найдите значение выражения $(8a^3-6a^2):2a^2-(10a^2-5a):5a$ при $a=1$ и $a=9$.

5. ВЫНЕСЕНИЕ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЗА СКОБКИ

Рассмотрим примеры решения следующих уравнений:

$(2x-8)(3x-15)(x+2)=0$; $\quad x^2-4x=0$; $\quad x(x+5)-7(x+5)=0$.

Решить уравнение $(2x-8)(3x-15)(x+2)=0$ совсем просто. Произведение может равняться нулю лишь в случае, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому равенство $(2x-8)(3x-15)(x+2)=0$ может выполняться лишь в случае, когда или

$$2x-8=0, \text{ или } 3x-15=0, \text{ или } x+2=0.$$

Решая эти уравнения, получаем, что корнями заданного уравнения являются числа 4, 5, -2. Пишут: $x_1=4$, $x_2=5$, $x_3=-2$.

Уравнение $x^2-4x=0$ можно решить следующим образом. Вынесем в левой части за скобки общий множитель x. Получим уравнение $x(x-4)=0$. Его корнями являются $x_1=0$ и $x_2=4$.

Таким же образом решаем уравнение $x(x+5)-7(x+5)=0$. Здесь надо вынести за скобки общий множитель $x+5$. Получаем уравнение $(x+5)(x-7)=0$. Его корнями являются $x_1=-5$ и $x_2=7$.

Эти примеры показывают, что вынесение общих множителей за скобки полезно для решения уравнений. Его применяют также при сокращении дробей и приведении их к одному знаменателю.

Если какая-нибудь переменная входит в один член многочлена с показателем 4, в другой — с показателем 5, а в третий — с показателем 2, то за *скобки можно вынести эту переменную* с показателем 2, т. е. *с наименьшим из показателей, с которыми она входит в члены многочлена*. Если же хотя бы в один из членов эта переменная не входит, то за скобки ее не выносят.

Пример 1.

Вынесем за скобки общий множитель многочлена

$$4x^5-5x^3+7x^2.$$

Решение. Переменная x входит в члены многочлена с показателями 5, 3, 2. Наименьшим из них является 2. Значит, за скобки можно вынести x^2. Остающиеся в скобках члены равны частным от деления членов многочлена на x^2. Таким образом,

$$4x^5-5x^3+7x^2=x^2\left(\frac{4x^5}{x^2}-\frac{5x^3}{x^2}+\frac{7x^2}{x^2}\right)=x^2(4x^3-5x+7).$$

Обычно деление членов на общий множитель делают устно и пишут сразу:

$$4x^5-5x^3+7x^2=x^2(4x^3-5x+7).$$

Пример 2.

Вынесем за скобки общий множитель многочлена

$$6x^7y^2-8x^3y^8z+4x^4yz^5.$$

Решение. Переменная x выносится с показателем 3, переменная y — с показателем 1 (т. е. выносится y), а переменная z не выносится за скобки, так как она не входит в первый член. Кроме того, выносим общий делитель коэффициентов — число 2:

$$6x^7y^2-8x^3y^8z+4x^4yz^5=2x^3y\left(\frac{6x^7y^2}{2x^3y}-\frac{8x^3y^8z}{2x^3y}+\frac{4x^4yz^5}{2x^3y}\right)=$$
$$=2x^3y(3x^4y-4y^7z+2xz^5).$$

УПРАЖНЕНИЯ

48. Укажите общий множитель членов многочлена:

а) $6a^5-7a^3+8a^2$;
б) $0{,}1x^3y^6+0{,}2x^6y^3$;
в) $2a^4x^3y^5+3a^3x^2y^6-7a^5x^4y^3$;
г) $24c^{m+6}-18c^{m+4}-12c^{m+2}$.

49. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $7ax+7x$;
б) $22y-11xy$;
в) x^3-x^2;
г) $3x+6x^2$;
д) y^4+2y^3;
е) $6a^2b+12ab^2$;
ж) $10a-15b+15ab$;
з) $2c^6-15c^2$;
и) $12a^2b-18ab^2-3ab^3$;
к) $20x^4-25x^2y^2-10x^3$.

50. Найдите значение выражения:

а) $3{,}28x-x^2$ при $x=2{,}28$;
б) a^2b-a^3 при $a=-3{,}5$, $b=6{,}5$.

51. Решите уравнение путем разложения левой части на множители:

а) $x^2-17x=0$;
б) $x^2+8x=0$;
в) $5y(y+2)+55(y+2)=0$;
г) $4(y-7)-16y(y-7)=0$;
д) $y^4-8y^3=0$;
е) $x^5-6x^4=0$.

52. Докажите, что:

а) 48^7-48^6 делится на 47;
б) 24^8-24^7 делится на 23;
в) $5^{23}-5^{21}$ делится на 24;
г) 25^7+5^{13} делится на 30.

53. Разложите на множители числитель и знаменатель, после чего сократите дробь:

а) $\frac{3a+12b}{6ab}$;
б) $\frac{15b-10bc}{10b}$;
в) $\frac{3x}{9x-6xy}$;
г) $\frac{7mn}{7m+21mn}$;
д) $\frac{a^6-6a}{3a^2}$;
е) $\frac{5y^2}{8xy-3y^2}$;
ж) $\frac{2a-4}{3a-6}$;
з) $\frac{5xy+15x}{6y+18}$;
и) $\frac{a-3b}{a^2-3ab}$;
к) $\frac{x+5y}{3x^2+15xy}$;
л) $\frac{a(x+3y^2)-2b(x+3y^2)}{(a+b)(x+3y^2)}$;
м) $\frac{x(2a-7b)-3y(2a-7b)}{x^3-3x^2y}$.

54. Приведите дроби к одному знаменателю:

а) $\frac{x}{4a-6b}$ и $\frac{y}{14a-21b}$;
б) $\frac{x+y}{ax-2bx}$ и $\frac{x-y}{ay-2by}$;
в) $\frac{2x+1}{4a^3-3a^2b}$ и $\frac{2x-1}{4ab^3-3b^4}$;
г) $\frac{3a+8}{7ax^3+6bx^3}$ и $\frac{2a-5}{4cx^4+2dx^4}$;
д) $\frac{12x+7}{2a^2b^3-3a^3b^2}$ и $\frac{6y+3}{2bx-3ax}$;
е) $\frac{x^3+y^3}{4x^3y+4xy^3}$ и $\frac{x^2-y^2}{6x^4y^2+6x^2y^4}$.

55. Выполните указанные действия:

а) $\frac{6a+18}{9b+45}:\frac{4a+12}{4b+20}$;
б) $\frac{16ab-24ac}{54b^2-24by}\cdot\frac{18by-8y^2}{16bx-24cx}$;
в) $\frac{4ab}{5x^3-3x^2y}\cdot\frac{5x^2y-3xy^2}{7ac}$;
г) $\frac{6a^2x^2-15a^3x}{13b^2y^2-26by^3}:\frac{8x^3-20ax^2}{6y^3-36y^2}$.

56. Вычислите значение дроби:

а) $\frac{cp^2-2p^2}{2pc-4p}$ при $p=5$, $c=4{,}17$;
б) $\frac{10a^2x^3-18ax^4}{25ax^4-45x^5}$ при $a=3{,}15$, $x=\frac{1}{7}$.

57. Сложите дроби:

а) $\frac{3x^2+1}{x^3-5x^2}+\frac{2x+8}{x^2-5x}$;
б) $\frac{2a-3b}{3a^2+5ab}-\frac{6a+7b}{3ab+5b^2}$.

6. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Заменим в тождестве $(a+b)c=ac+bc$ переменную c на $x+y$. Получим

$$(a+b)(x+y)=a(x+y)+b(x+y).$$

Еще раз применяя распределительное свойство умножения, получаем

$$(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by. \qquad (1)$$

Вообще при умножении суммы на сумму надо каждый член первой суммы умножить на каждый член второй суммы и результаты сложить.

Умножение суммы на сумму выполняют так: сначала умножают первое слагаемое первой суммы последовательно на все слагаемые второй суммы, потом аналогично поступают со вторым слагаемым первой суммы и т. д., а полученные произведения складывают.

При положительных значениях a, b, x, y тождество (1) имеет простой геометрический смысл. Оно означает, что площадь прямоугольника со сторонами длины $a+b$ и $x+y$ равна сумме площадей четырех меньших прямоугольников (рис. 4).

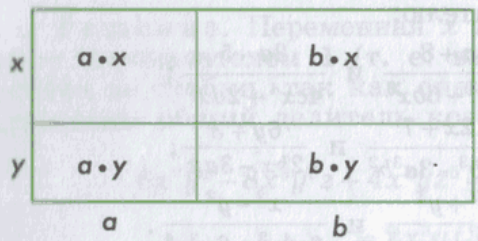


Рис. 4

Правило умножения суммы на сумму применяют для умножения многочленов. При этом получается новый многочлен, называемый *произведением* данных многочленов. Его надо привести к стандартному виду.

Легко показать, что **степень произведения двух многочленов равна сумме степеней множителей.**

Пример 1.

Найдем произведение многочленов $(x^2+xy+y^2)(x-y)$.

Решение. Умножая каждый член первого многочлена на каждый член второго многочлена и складывая полученные произведения, находим

$$(x^2+xy+y^2)(x-y)=x^2\cdot x-x^2\cdot y+xy\cdot x-xy\cdot y+y^2\cdot x-y^2\cdot y.$$

Заменим произведения одночленов стандартными одночленами и приведем подобные члены.
Получим

$$(x^2+xy+y^2)(x-y)=x^3-x^2y+x^2y-xy^2+y^2x-y^3=x^3-y^3.$$

Пример 2.

Найдем произведение многочленов $(2a^2-4ab+9b^2)(6a^3-ab^2+7b^3)$.

Решение. $(2a^2-4ab+9b^2)(6a^3-ab^2+7b^3)=$

$=2a^2\cdot 6a^3-2a^2\cdot ab^2+2a^2\cdot 7b^3-4ab\cdot 6a^3+4ab\cdot ab^2-$

$-4ab\cdot 7b^3+9b^2\cdot 6a^3-9b^2\cdot ab^2+9b^2\cdot 7b^3=$

$=12a^5-2a^3b^2+14a^2b^3-24a^4b+4a^2b^3-28ab^4+54a^3b^2-9ab^4+63b^5=$

$=12a^5-24a^4b+52a^3b^2+18a^2b^3-37ab^4+63b^5.$

УПРАЖНЕНИЯ

58. Докажите, что $(3x-b)(y+2a)=3xy+6ax-by-2ab$.

59. Замените выражение суммой:

а) $5(x+1)(y-2)$;
б) $(4a+b)(x-3y)$;
в) $(4x-y)(2a+5b)$;
г) $(7{,}1x+3{,}2a)(6{,}1y-2{,}5b)$;
д) $(x+y+z)(a-b)$;
е) $(2x+3y-6)(a-b+c)$.

60. Раскройте скобки и приведите подобные члены:

а) $(x+2)(x+3)$;
б) $(x+4)(x-7)$;
в) $(x+5)(2x+4)$;
г) $(x-8)(x-1)$;
д) $x(x-1)+y(y+1)$;
е) $x(x-y)+y(x-2y)$;
ж) $2(x+1)(x+2)-3(x+4)(x+5)$;
з) $7(2x+1)(3x-1)+5(x-4)(2x+4)$.

61. Решите уравнение:

а) $(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)=2$;
б) $(x+2)(x+4)-(x+1)(x+5)=3$;
в) $(2x+1)(x+5)-(x+3)(2x+4)=-5$;
г) $(5x+3)(6x-1)-(15x+1)(2x+7)=-104$.

62. Выполните умножение многочленов:

а) $(5x^2-4x)(x+1)$;
б) $(4a^3-3a^2)(a-2)$;
в) $(7p^2-2p)(8p-5)$;
г) $(11t^4-9t^2)(3t-2)$;
д) $(a^2-2a+3)(a-4)$;
е) $(2x^2-3x-1)(5x+2)$.

63. Упростите выражение:

а) $(3b-2)(5-2b)+6b^2$;
б) $(7y-4)(2y+3)-13y$;
в) $5b^3-(a^2+5b)(ab+b^2)$;
г) $x^3-(x^2-3x)(x+3)$.

64. Найдите значение выражения:

а) $(a-2b)(2a+b)-2a^2$ при $a=8$, $b=-12$;

б) $(p-3x)(p+2x)-p(p-x)$ при $x=\frac{1}{3}$;

в) $(x^2-bx+2b^2)(x-b)-(x^2+2bx-b^2)(x+2b)$ при $x=-1\frac{1}{3}$, $b=-1\frac{1}{8}$;

г) $(a^2+4ax+x^2)(a-2x)-(a+x)(a^2-5ax-2x^2)$ при $a=-1\frac{1}{9}$, $x=0{,}27$.

65. Решите уравнение:

а) $6x^2-(2x-3)(3x+2)=2$; б) $(10x+9)x-(5x-1)(2x+3)=8$.

66. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $(x-3)(x+7)-(x+5)(x-1)$; б) $k^4-(k^2+1)(k^2-1)$.

67. Упростите:

а) сумму выражений x^3+5x^2+8 и $(x^2-6x+4)(x-1)$;
б) разность выражений $(a^2+7a-4)(a-3)$ и $a^3+4a^2-29a+1$.

68. Докажите, что:

а) значение выражения $n(n+5)-(n-3)(n+2)$ при всех целых n делится на 6;
б) значение выражения $(n-1)(n+1)-(n-7)(n-5)$ при всех нечетных n делится на 12.

69. Представьте произведение или частное, сумму или разность дробей в виде дроби, у которой числитель и знаменатель — многочлены стандартного вида:

а) $\frac{2x^2+1}{3x+2}\cdot\frac{5x^2-4}{6x^3+5}$; в) $\frac{x^3+4}{x^2+x+1}+\frac{3x^2+1}{x-1}$;

б) $\frac{x^2-2x+3}{7x+7}:\frac{9x^3+1}{x^2-5}$; г) $\frac{a^2b^2+12}{a^2+b^2}-\frac{a^2b^2+4}{a^2-b^2}$.

7. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ МЕТОДОМ ГРУППИРОВКИ

За скобки можно выносить не только одночлены, но и более сложные выражения.

Пример 1.

Разложим на множители выражение:

а) $5x^2(3a-7b)+6y^2(3a-7b)$;
б) $12a^3b(6x-5y)^3-4ab^2(6x-5y)^4$.

Решение. а) Общим множителем в данном случае является $3a-7b$. Имеем

$$5x^2(3a-7b)+6y^2(3a-7b)=(3a-7b)(5x^2+6y^2).$$

б) В этом случае общий множитель имеет вид $4ab(6x-5y)^3$. Поэтому

$$12a^3b(6x-5y)^3-4ab^2(6x-5y)^4=$$
$$=4ab(6x-5y)^3(3a^2-b(6x-5y))=4ab(6x-5y)^3(3a^2-6bx+5by).$$

Вынесение за скобки многочлена применяется при разложении многочлена на множители *методом группировки*. Для этого группируют члены многочлена так, чтобы после вынесения общих множителей за скобки в каждой группе в скобках остался один и тот же многочлен. Вынося его за скобки, разлагаем заданный многочлен на множители.

Пример 2.

Разложим на множители многочлен $6ac+2ad-9bc-3bd$.

Решение. Группируем вместе слагаемые $6ac$ и $2ad$, а также слагаемые $-9bc$ и $-3bd$ и выносим в каждой группе за скобки общий множитель. Получаем

$$6ac+2ad-9bc-3bd=(6ac+2ad)-(9bc+3bd)=2a(3c+d)-3b(3c+d).$$

А теперь в каждом из слагаемых имеем множитель $3c+d$. Вынося его за скобки, получаем

$$6ac+2ad-9bc-3bd=(3c+d)(2a-3b).$$

Пример 3.

Разложим на множители методом группировки многочлен

$$2ax^2-5bx^2-4ay^2+10by^2.$$

Решение. Группируем члены $2ax^2$ и $-4ay^2$, а также $-5bx^2$ и $10by^2$. Имеем

$$(2ax^2-4ay^2)-(5bx^2-10by^2)=2a(x^2-2y^2)-5b(x^2-2y^2)=(x^2-2y^2)(2a-5b).$$

Пример 4.

Решим уравнение $x^3-6x^2+7x-42=0$.

Решение. Разложим левую часть этого уравнения на множители:

$$x^3-6x^2+7x-42=(x^3-6x^2)+(7x-42)=x^2(x-6)+7(x-6)=(x-6)(x^2+7).$$

Значит, данное уравнение записывается так:

$$(x-6)(x^2+7)=0.$$

Поскольку сумма x^2+7 не обращается в нуль ни при одном значении x (она всегда положительна), уравнение имеет единственный корень $x=6$.

УПРАЖНЕНИЯ

70. Разложите на множители выражение:

а) $a(b+c)+3(b+c)$;
б) $5(x-y)-y(x-y)$;
в) $y(a-c)+5a-5c$;
г) $z(c-d)+c-d$;
д) $a(p+q)-p-q$;
е) $a(2c+3p)+2c+3p$;
ж) $kx+ky-2n(x+y)$;
з) $3l(s-a)-2ks+2ka$.

71. Докажите тождество:

а) $(b-c)(x^2+4x+5)-(a-c)(x^2+4x+5)=(b-a)(x^2+4x+5)$;
б) $(7x-3y)(a^2+2b^2)-(4x-3y)(a^2+2b^2)=3x(a^2+2b^2)$.

72. Докажите тождество $a(b-c)=-a(c-b)$ и с его помощью разложите на множители многочлен:

а) $a(c-b)+d(b-c)$;
б) $x(y-5)-y(5-y)$;
в) $3a(2x-7)+5b(7-2x)$;
г) $11p(3p^2-q^2)-2q(q^2-3p^2)$.

73. Разложите на множители выражение:

а) $5x(x-y)+(2x+y)(y-x)$;
б) $(7a+4b)(a-b)-6a(b-a)$;
в) $11b(2b-3c)+(10b+c)(3c-2b)$;
г) $(a-3k)(a+4k)-(3k-a)(2a-7k)$.

74. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $x(b-c)+2(c-b)$ при $x=2$, $b=1{,}007$, $c=-0{,}006$;
б) $2a(p-r)+(r-p)(a+b)$ при $a=18{,}3$, $b=-31{,}7$, $p=24{,}6$, $r=10{,}6$;
в) $(x-y)(y+c)+y(y-x)$ при $x=0{,}86$, $y=0{,}26$, $c=1{,}5$.

75. Докажите тождество:

а) $(x-2b)(x^2-5bx+6b^2)+(2b-x)(x^2-6bx+6b^2)=bx(x-2b)$;
б) $(a-3c)(2a^2-7ac-c^2)-(3c-a)(c^2+7ac-a^2)=a^2(a-3c)$.

76. Решите уравнение с помощью разложения на множители:

а) $x(x-7)+3(x-7)=0$;
б) $y(y-9)-5(9-y)=0$;
в) $(x+1)(x+2)-5(x+2)=0$;
г) $21(x-6)+(x+5)(6-x)=0$.

77. Докажите тождество

$$(x^2-2y^2)(x^3-6ax^2+y^3)+(2y^2-x^2)(x^3-17ax^2+y^3)=11ax^2(x^2-2y^2).$$

78. Разложите на множители многочлен:

а) $mx+my+10x+10y$;
б) $9x+9y+ax+ay$;
в) $7a-7b+an-bn$;
г) $ac+bc-2a-2b$;
д) $a^2-ab-8a+8b$;
е) $11x+11y-x^2-xy$;
ж) x^2+ax-a^2y-axy;
з) $a^2n-anx+x^2-ax$;
и) $5a^3c+10a^2-6bc-3abc^2$;
к) $8xy^3-24y^2-7axy+21a$.

79. Представьте многочлен в виде произведения двучлена на трехчлен:

а) $an^2+cn^2-ap-cp+ap^2+cp^2$;
б) $ax^2+ay^2-bx^2-by^2+b-a$;
в) $xy^2-by^2-ax+ab+y^2-a$;
г) $ac^2-ad-bc^2+cd+bd-c^3$.

80. Найдите значение выражения:

а) $13{,}5\cdot 5{,}8-8{,}3\cdot 4{,}2-5{,}8\cdot 8{,}3+4{,}2\cdot 13{,}5$;
б) $31\cdot 82+125\cdot 48+31\cdot 43-125\cdot 67$.

81. Разложите на множители:

а) $5x^3-2x^2+5x-2$;
б) $6a^2bc-3ac^2-4ab^2+2bc$;
в) $5(a+b)^2-4a^2-4ab$;
г) $3(x-7)^2+8x-56$.

82. Найдите значение выражения, предварительно разложив его на множители:

а) a^2b-ab^2-a при $a=-1\frac{5}{8}$, $b=-\frac{8}{13}$;
б) $p^2q^2+pq-q^3-p^3$ при $p=-1{,}5$, $q=-0{,}75$;
в) $2a+ac^2-a^2c-2c$ при $a=-\frac{8}{21}$, $c=-5\frac{1}{4}$;
г) $3x^3-2y^3-6x^2y^2+xy$ при $x=\frac{2}{3}$, $y=-0{,}5$.

83. Сократите дробь, предварительно разложив на множители числитель и знаменатель:

а) $\frac{ax+bx-ay-by}{7x-7y}$;
в) $\frac{xy-x+y-y^2}{x^2+5x-xy-5y}$;
б) $\frac{8a+4b}{2ac+bc-2ad-bd}$;
г) $\frac{ax+ay+cx+cy}{a^2+ac-ax-cx}$.

84. Упростите выражение:

а) $\frac{ax+ay+2x+2y}{2a+4}\cdot\frac{8a-16}{ax+ay-2x-2y}$;
б) $\frac{ab-5bx+3a-15x}{4ab^2-8b^3}\cdot\frac{a-2b}{a-5x}$.

85. Выполните действия над дробями:

а) $\frac{5x-a}{ax-5a+bx-5b}+\frac{6y+3b}{ay+4a+by+4b}$;
б) $\frac{8a+5b}{ay+cy+2a+2c}-\frac{7a-3b}{xy+2x+y^2+2y}$.

86. Решите уравнение:

а) $x^3+8x^2+5x+40=0$;
б) $x^3-6x^2+9x-54=0$.

§ 2. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

8. УМНОЖЕНИЕ СУММЫ ДВУХ ВЫРАЖЕНИЙ НА ИХ РАЗНОСТЬ

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые случаи умножения многочленов, которые встречаются чаще других. Начнем с умножения $a+b$ на $a-b$:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2.$$

Итак, справедливо тождество

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \qquad (1)$$

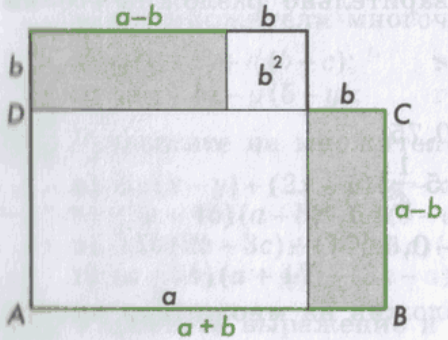


Рис. 5

Его называют *формулой разности квадратов* и читают так: *произведение суммы двух выражений на их разность равно разности квадратов этих выражений.*

Геометрический смысл тождества (1) виден на рисунке 5.

При $a>0$, $b>0$, $a>b$ площадь прямоугольника $ABCD$ со сторонами $a+b$ и $a-b$ равна площади квадрата со стороной a, из которого вырезан квадрат со стороной b.

Пример 1.

Найдем произведение $5{,}3 \cdot 4{,}7$.

Решение. По формуле (1) получаем

$$5{,}3 \cdot 4{,}7=(5+0{,}3)(5-0{,}3)=5^2-0{,}3^2=25-0{,}09=24{,}91.$$

Пример 2.

Заменим в формуле (1) a на $2x^2$ и b на $7y^2$:

$$(2x^2+7y^2)(2x^2-7y^2)=(2x^2)^2-(7y^2)^2=4x^4-49y^4.$$

Пример 3.

Раскроем скобки в выражении $(3x+5y)(3x-5y)$.

Решение. Это выражение получается из $(a+b)(a-b)$ заменой a на $3x$ и b на $5y$. Значит, $(3x+5y)(3x-5y)=(3x)^2-(5y)^2=9x^2-25y^2$.

Формулу (1) применяют и для разложения выражений на м
жители (т. е. справа налево).

Пример 4.

Разложим на множители $100x^6 - 9y^8$.

Решение. Так как $100x^6 = 10^2(x^3)^2 = (10x^3)^2$, $9y^8 = 3^2(y^4)^2 = (3y$
то $100x^6 - 9y^8 = (10x^3)^2 - (3y^4)^2 = (10x^3 + 3y^4)(10x^3 - 3y^4)$.

Пример 5.

Решим уравнение $4x^2 - 81 = 0$.

Решение. Так как $4x^2 - 81 = (2x)^2 - 9^2 = (2x + 9)(2x - 9)$, то ура
ние $4x^2 - 81 = 0$ запишем так: $(2x + 9)(2x - 9) = 0$. Решая уравне
$2x + 9 = 0$ и $2x - 9 = 0$, находим $x_1 = -4{,}5$, $x_2 = 4{,}5$.

УПРАЖНЕНИЯ

87. Выполните умножение:

а) $(x - 3)(x + 3)$;

б) $(2a - 5)(2a + 5)$;

в) $(3p + 7)(3p - 7)$;

г) $(3b + c)(3b - c)$;

д) $(0{,}3x - 1)(0{,}3x + 1)$;

е) $\left(100 - \frac{1}{2}ay\right)\left(100 + \frac{1}{2}ay\right)$;

ж) $(a^3 - 2)(a^3 + 2)$;

з) $(3ab^2 - c^3)(3ab^2 + c^3)$;

и) $(ay^2 + bx^2)(ay^2 - bx^2)$;

к) $(8a^3 + 3b^3)(8a^3 - 3b^3)$.

88. Раскройте скобки:

а) $\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{3}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{c}{3}\right)$;

б) $\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{7}\right)\left(\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{7}\right)$;

в) $\left(\frac{p^3}{3} - 1\right)\left(\frac{p^3}{3} + 1\right)$;

г) $\left(\frac{a^3}{4b} + \frac{b^3}{3a}\right)\left(\frac{a^3}{4b} - \frac{b^3}{3a}\right)$;

д) $\left(\frac{ax^2}{by} - \frac{cy^2}{dx}\right)\left(\frac{ax^2}{by} + \frac{cy^2}{dx}\right)$;

е) $\left(\frac{n^5}{5} + 4\right)\left(\frac{n^5}{5} - 4\right)$.

89. Преобразуйте выражение в двучлен:

а) $(4 - x)(4 + x)$;

б) $(9 - 2xy)(9 + 2xy)$;

в) $(0{,}7a + b)(0{,}7a - b)$;

г) $\left(a + \frac{2}{3}b\right)\left(a - \frac{2}{3}b\right)$;

д) $(0{,}3xy - z)(0{,}3xy + z)$;

е) $\left(a + \frac{b}{3}\right)\left(a - \frac{b}{3}\right)$;

ж) $\left(\frac{x}{10} - \frac{xy}{3}\right)\left(\frac{x}{10} + \frac{xy}{3}\right)$;

з) $(12b^2 + a)(12b^2 - a)$.

90. Выполните умножение:

а) $(2a^2+b)(2a^2-b)$;
б) $(10x^3+1)(10x^3-1)$;
в) $(0{,}2ax^4+1)(0{,}2ax^4-1)$;
г) $(c^{10}-3)(c^{10}+3)$;
д) $(x^6+y^{10})(x^6-y^{10})$;
е) $(2y+a^8)(2y-a^8)$.

91. С помощью тождества (1) выполните устно вычисления по образцу

$$68 \cdot 72 = (70-2)(70+2) = 70^2 - 2^2 = 4900 - 4 = 4896:$$

а) $37 \cdot 43$; б) $54 \cdot 46$; в) $92 \cdot 88$; г) $201 \cdot 199$.

92. Выполните умножение:

а) $4(b+c)(b-c)$;
б) $(y-8) \cdot 3 \cdot (y+8)$;
в) $(3x+15)(x-5)$;
г) $(y+4)(y-4)(y^2+16)$.

93. Представьте, если это возможно, в виде разности квадратов выражение:

а) $a^2(x-y)(x+y)$;
б) $49(a+1)(1-a)$;
в) $a(b-c)(ab+ac)$;
г) $x^3(x-1)(x^2+x)$;
д) $(p-1)(p+1)(p^2+1)$;
е) $(y+3)(y-3)(y^2+9)$;
ж) $(a+b+1)(a+b-1)$;
з) $(x-y+2)(x+y-2)$;
и) $(1+x+y)(1-x-y)$;
к) $(a+b+c)(a+b-c)$.

94. Разложите многочлен на множители:

а) x^2-y^2;
б) $4-p^2$;
в) $a^2b^2-c^2$;
г) $25c^2-9$;
д) $100-a^4$;
е) $81c^2d^2-100a^2$;
ж) $121x^2-49y^2$;
з) $0{,}01a^2-\frac{4}{9}$;
и) $0{,}64b^2-0{,}25$;
к) $1{,}44y^{10}-0{,}01$;
л) $\frac{16}{25}x^4-\frac{49}{81}y^6$;
м) $\frac{25}{36}x^4y^4-\frac{9}{49}a^2b^2$.

95. Найдите значение выражения:

а) 47^2-37^2;
б) 53^2-63^2;
в) 87^2-13^2;
г) 126^2-74^2;
д) $21{,}3^2-21{,}2^2$;
е) $50{,}7^2-50{,}6^2$;
ж) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2-\left(4\frac{1}{3}\right)^2$;
з) $\left(7\frac{6}{11}\right)^2-\left(2\frac{5}{11}\right)^2$.

96. Сократите дробь:

а) $\frac{53^2-27^2}{79^2-51^2}$; б) $\frac{53^2-32^2}{61^2-44^2}$; в) $\frac{38^2-17^2}{47^2-19^2}$; г) $\frac{101^2-31^2}{139^2-29^2}$.

97. Разложите на множители:

а) $a^{100}-4$;
б) $x^{30}-9$;
в) $5^{2n}-49$;
г) $100c^2-4^n$.

98. Сократите дробь:

а) $\frac{p^2-q^2}{p(p-q)}$; г) $\frac{55x^2-66bx}{25x^2-36b^2}$; ж) $\frac{25a^2-25b^2}{(5a-5b)^2}$;

б) $\frac{4a^2-9b^2}{2a^2+3ab}$; д) $\frac{a-1}{(1-a)^2}$; з) $\frac{y^2-16}{3y+12}$;

в) $\frac{x+3y}{x^2-9y^2}$; е) $\frac{(2x-2y)^2}{4x^2-4y^2}$; и) $\frac{15z^2-9z}{25z^2-9}$.

99. Разложите на множители:

а) $(x+3)^2-1$; е) $(x^4-x^2)^2-36$; л) $a^2(b-1)-b+1$;

б) $64-(b+1)^2$; ж) x^3-x; м) $b(x^2-4)+4-x^2$;

в) $9-(4a-2)^2$; з) a^2y-y^3; н) $9a^3-9a^2b-a+b$;

г) $25-(a+7)^2$; и) a^4-1; о) $y^3-5y^2-16y+80$.

д) $81-(5y-6)^2$; к) $16-b^4$;

100. Решите уравнение путем разложения левой части на множител

а) $x^2-1=0$; г) $16y^3-25y=0$; ж) $4x^2+81=0$;

б) $9-x^2=0$; д) $y^3-6y^2-16y+96=0$; з) $16y^3+25y=0$.

в) $4x^2-81=0$; е) $y^3+8y^2-25y-200=0$;

101. Разложите на множители:

а) x^2-y^2+x-y; д) $a^2b^2-ab^2-ab-a^2$;

б) x^2-y^2-x-y; е) $b^2c^2-4bc-20b-25b^2$;

в) $4a^2-2a+b-b^2$; ж) $81x^2-9x-10y-100y^2$;

г) $a^2+a+2b-4b^2$; з) $16n^2-20n+35k-49k^2$.

102. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $19{,}7^2-8{,}3^2-28\cdot 8{,}6$; б) $46{,}9^2-23{,}7^2-70{,}6\cdot 13{,}2$.

103. Докажите, что при любом целом значении n:

а) $(4n+1)^2-(n+4)^2$ делится на 15;

б) $(4{,}5n+8)^2-(2{,}5n+6)^2$ делится на 28.

104. Выполните указанные действия:

а) $\frac{3}{b(b+1)}-\frac{2}{b(b-1)}$; г) $\frac{m-3}{m+3}-\frac{m+3}{m-3}+\frac{2m}{m^2-9}$;

б) $\frac{5}{x(x-2)}-\frac{3}{x(x+2)}$; д) $\frac{m}{1-m^2}+\frac{1}{1+m}$;

в) $\frac{x}{x+1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}$; е) $\frac{4n}{n^2-9}-\frac{2}{n-3}$.

105. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $\frac{a+1}{a^2-a}-\frac{a+2}{a^2-1}$ при $a=-2$; б) $\frac{y+2}{y^2+3y}+\frac{5-y}{y^2-9}$ при $y=1{,}5$.

106. Упростите выражение:

а) $\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-2}+\frac{12}{x^2-4}$;

б) $\frac{7}{y^2-9}+\frac{5}{y-3}+\frac{1}{y+3}$;

в) $\frac{a}{a-6}-\frac{3}{a+6}+\frac{a^2}{36-a^2}$;

г) $\frac{2b}{2b+3}+\frac{5}{3-2b}-\frac{4b^2+9}{4b^2-9}$;

д) $\frac{x+3}{x}+\frac{x}{x-3}+\frac{9}{x^2-3x}$;

е) $\frac{3}{2x^2+2x}+\frac{2x-1}{x^2-1}-\frac{2}{x}$;

ж) $\frac{a-1}{2a+2}+\frac{a+1}{3-3a}+\frac{5a-1}{3a^2-3}$;

з) $\frac{4m}{4m^2-1}-\frac{2m+1}{6m-3}+\frac{2m-1}{4m+2}$;

и) $\frac{2a+b}{2a^2-ab}-\frac{16a}{4a^2-b^2}+\frac{2a-b}{2a^2+ab}$;

к) $\frac{10}{x^2-25y^2}+\frac{1}{5y^2-xy}-\frac{5}{x^2+5xy}$.

107. Найдите произведение дробей и сократите его:

а) $\frac{m^2-9n^2}{m^2n^2}\cdot\frac{2mn}{m+3n}$;

б) $\frac{x^3-x^2y}{x^2-y^2}\cdot\frac{xy^2+y^3}{x^4y}$;

в) $\frac{4a^2-b^2}{a^2-ab}\cdot\frac{a-b}{2ab-b^2}$;

г) $\frac{ab-5bx+3a-15x}{4b^3-a^2b}\cdot\frac{a-2b}{a-5x}$.

108. Найдите частное от деления дробей и сократите его:

а) $\frac{m^2-4n^2}{3mn}:\frac{(m+2n)^2}{9m^2}$;

б) $\frac{a+5b}{4m^2-49n^2}:\frac{a^2-25b^2}{2m+7n}$.

9. ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ ВЫРАЖЕНИЙ

Возведем $a+b$ в квадрат: $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2$. Так как $ab=ba$, то

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \quad (1)$$

Тождество (1) называют *формулой квадрата суммы* и читают так: *квадрат суммы двух выражений равен сумме квадратов этих выражений, сложенной с удвоенным произведением тех же выражений.*

Заменив в формуле (1) b на $-b$, получим

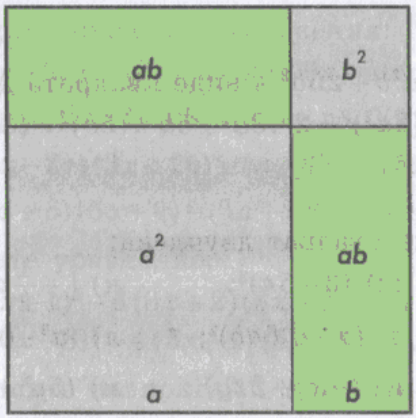
$$(a+(-b))^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2.$$

Так как $a+(-b)=a-b$, $2a(-b)=-2ab$, $(-b)^2=(-b)(-b)=b^2$, то

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \quad (2)$$

Тождество (2) называют *формулой квадрата разности* и читают так: *квадрат разности двух выражений равен сумме квадратов этих выражений, из которой вычтено удвоенное произведение тех же выражений.*

Геометрический смысл формул (1) и (2) виден из рисунка 6.



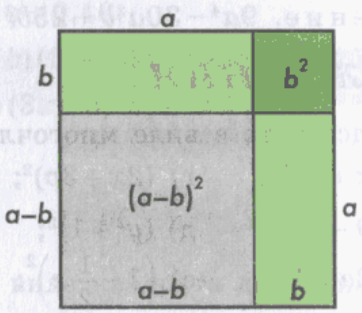


Рис. 6

Пример 1.

Найдем $9{,}1^2$ и $4{,}9^2$.

Решение. Имеем

$$9{,}1^2=(9+0{,}1)^2=9^2+2\cdot 9\cdot 0{,}1+0{,}1^2=81+1{,}8+0{,}01=82{,}81,$$
$$4{,}9^2=(5-0{,}1)^2=5^2-2\cdot 5\cdot 0{,}1+0{,}1^2=25-1+0{,}01=24{,}01.$$

Пример 2.

Заменим в формулах (1) и (2) a на x^2 и b на y^3.

Решение. $(x^2+y^3)^2=(x^2)^2+2x^2y^3+(y^3)^2=x^4+2x^2y^3+y^6,$
$(x^2-y^3)^2=(x^2)^2-2x^2y^3+(y^3)^2=x^4-2x^2y^3+y^6.$

Пример 3.

Представим выражение $(2x+3y)^2$ в виде многочлена.

Решение. Заменим в формуле (1) a на $2x$ и b на $3y$:

$$(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2.$$

Формулы (1) и (2) применяют и для преобразования трехчлена в квадрат двучлена.

Пример 4.

Представим многочлен $25x^2+40x+16$ в виде квадрата двучлена.

Решение. Поскольку $25x^2=(5x)^2$ и $16=4^2$, то

$$25x^2+40x+16=(5x)^2+40x+4^2.$$

Так как $40x=2\cdot 5x\cdot 4$, то по формуле (1) имеем

$$25x^2+40x+16=(5x)^2+2\cdot 5x\cdot 4+4^2=(5x+4)^2.$$

Пример 5.

Представим многочлен $9a^4-30a^2b+25b^2$ в виде квадрата двучлена.

Решение. $9a^4-30a^2b+25b^2=(3a^2)^2-2\cdot 3a^2\cdot 5b+(5b)^2=(3a^2-5b)^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

109. Представьте в виде многочлена квадрат двучлена:

а) $(x+10)^2$; г) $(2x+3p)^2$; ж) $(3-5n)^2$; к) $\left(-\frac{1}{2}ab-bc\right)^2$;

б) $(9-b)^2$; д) $(y^2+1)^2$; з) $(a-0{,}5ab)^2$; л) $(a^3-b^3)^2$;

в) $(2a+1)^2$; е) $\left(1-\frac{1}{2}z\right)^2$; и) $(-x^2+2xy)^2$; м) $(5y^2+4x^2)^2$.

110. Раскройте скобки в выражении:

а) $(0{,}5a-0{,}6b)^2$; г) $(0{,}8t^2-5t)^2$; ж) $(x+bx^3)^2$;

б) $(12x^2+0{,}4y)^2$; д) $\left(-a^5-\frac{1}{4}ab^3\right)^2$; з) $(-0{,}75a^4+4b^5)^2$.

в) $(-9a^3-6a^2)^2$; е) $(0{,}1p^3-10q^2)^2$;

111. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $4(5a+1)^2$; г) $(x+2y)(xy+2y^2)$; ж) $(4x-5)^2(5+4x)^2$;

б) $-3(2y-5)^2$; д) $(2a-3b)(20a-30b)$; з) $(-2a-3b)^2(3b-2a)^2$.

в) $b^2(b-x)^2$; е) $(3p-k)^2(3p+k)^2$;

112. Представьте в виде многочлена:

а) $(3x+2y)^2+(3x-2y)^2$; в) $2(4x-7)^2-(5x-9)^2$;

б) $(a+5)^2-(a-3b)^2$; г) $(8y+5)^2-3(4y+1)^2$.

113. Найдите значение выражения:

а) $(20+1)^2$; г) 102^2; ж) $19^2+2\cdot 19\cdot 21+21^2$;

б) $(30-1)^2$; д) 98^2; з) $107^2-2\cdot 107\cdot 67+67^2$;

в) 71^2; е) 201^2; и) 999^2; к) 69^2.

114. Двузначное число $\overline{xy}$ можно представить в виде $10x+y$, например, $37=10\cdot 3+7$. Используя этот факт, найдите квадрат числа, оканчивающегося на 5, и сделайте вывод. Вычислите:

а) 15^2; б) 45^2; в) 95^2; г) 105^2; д) 205^2; е) 1005^2.

115. Докажите тождество:

а) $(x-y)^2=(y-x)^2$; г) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$;

б) $(-p-q)^2=(q+p)^2$; д) $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$;

в) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$; е) $(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2$;

ж) $(a+b)^2-2(a+b)(a-b)+(a-b)^2=4b^2$;

з) $(x-1)^2+2(x+1)(x-1)+(x+1)^2=4x^2$.

116. Найдите значение выражения:

а) $(4y-3a)^2-(8y-a)(2y-9a)$ при $a=-\frac{1}{9}$, $y=0{,}54$;

б) $(3p-q)^2+(4p+3q)^2$ при $p=0{,}12$, $q=0{,}16$;

в) $(3x-2b)(3x+2b)+(x-3b)^2-(5x-b)(2x-5b)$ при $x=0{,}125$, $b=\frac{4}{7}$;

г) $(5a+6)(6a+4)-(4a+7)^2-(3a-5)(3a+5)$ при $a=-1\frac{3}{5}$.

117. Решите уравнение:

а) $(6x-1)^2-4(3x+2)(3x-2)=-7$;

б) $(10x-3)^2=4(5x-1)(5x+1)-7$.

118. Запишите квадратный трехчлен в виде квадрата двучлена:

а) $x^2-8x+16$;

б) $x^2+20x+100$;

в) $x^2+0{,}2x+0{,}01$;

г) $0{,}04x^2-2x+25$;

д) $49a^2+126ab+81b^2$;

е) $100a^4-100a^2b^3+25b^6$.

10. ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА ИЗ ТРЕХЧЛЕНА

Выражение $4x^2-12xy+8y^2$ не является квадратом двучлена. Но первые два члена этого выражения совпадают с первыми двумя членами квадрата двучлена: $4x^2=(2x)^2$, $12xy=2\cdot 2x\cdot 3y$. Если добавить к этим двум членам слагаемое $(3y)^2$, т. е. $9y^2$, получится квадрат разности. Поэтому прибавляем к заданному выражению $9y^2=(3y)^2$ и одновременно вычитаем $9y^2$:

$$4x^2-12xy+9y^2-9y^2+8y^2=(2x-3y)^2-y^2.$$

Выполненное преобразование называется **выделением полного квадрата из трехчлена.** В результате этого преобразования трехчлен записан в виде разности квадратов и его можно разложить на множители:

$$4x^2-12xy+8y^2=(2x-3y)^2-y^2=(2x-3y+y)(2x-3y-y)=$$
$$=(2x-2y)(2x-4y)=4(x-y)(x-2y).$$

Итак, чтобы выделить полный квадрат из трехчлена, надо:

а) записать одно из слагаемых в виде квадрата некоторого выражения X;

б) разделить второе слагаемое на $2X$; если частное равно Y, то записать это слагаемое в виде $2XY$;

в) прибавить и одновременно вычесть квадрат выражения Y;

г) применить формулу квадрата суммы или разности.

Пример 1.

Разложим на множители трехчлен $49x^8-70x^4y^3+16y^6$.

Решение. Имеем $49x^8=(7x^4)^2$. Здесь $X=7x^4$. Далее имеем $70x^4y^3:(2\cdot 7x^4)=5y^3$ и потому $Y=5y^3$. Значит, чтобы выделить полный квадрат, надо добавить и вычесть выражение $(5y^3)^2$. Имеем

$$49x^8-70x^4y^3+16y^6=(7x^4)^2-2\cdot 7x^4\cdot 5y^3+(5y^3)^2-(5y^3)^2+16y^6=$$
$$=(7x^4-5y^3)^2-25y^6+16y^6=(7x^4-5y^3)^2-9y^6.$$

А теперь по формуле разности квадратов получаем

$$49x^8-70x^4y^3+16y^6=(7x^4-5y^3)^2-9y^6=$$
$$=(7x^4-5y^3-3y^3)(7x^4-5y^3+3y^3)=(7x^4-8y^3)(7x^4-2y^3).$$

Пример 2.

Решим уравнение $x^2-8x+15=0$.
Решение. Имеем

$$x^2-8x+15=x^2-8x+16-16+15=(x-4)^2-1=(x-5)(x-3).$$

Значит, надо решить уравнение $(x-5)(x-3)=0$. Его корнями являются числа 5 и 3.

Пример 3.

Сократим дробь $\dfrac{36x^4-81}{36x^4-132x^2+117}$.

Решение. Имеем $36x^4-81=(6x^2)^2-9^2=(6x^2-9)(6x^2+9)$ и

$$36x^4-132x^2+117=(6x^2)^2-2\cdot 6x^2\cdot 11+11^2-11^2+117=$$
$$=(6x^2-11)^2-2^2=(6x^2-9)(6x^2-13).$$

Поэтому $\dfrac{36x^4-81}{36x^4-132x^2+117}=\dfrac{(6x^2-9)(6x^2+9)}{(6x^2-9)(6x^2-13)}=\dfrac{6x^2+9}{6x^2-13}$.

УПРАЖНЕНИЯ

119. Представьте, если возможно, в виде квадрата двучлена:

а) $x^2+2xy+y^2$;
б) $c^2-2cd+d^2$;
в) $a^2+6ab+9b^2$;
г) $x^2-10xy+100y^2$;
д) $4a^2-28ab+49b^2$;
е) $25b^2+20b+4$;
ж) $a^4-4a^2b+4b^2$;
з) $25a^6-40a^3b^2+16b^4$.

120. При каком значении m можно представить в виде квадрата двучлена:

а) $25x^2+30x+m$;
б) $my^2-72y+81$;
в) $64p^2-mpq+9q^2$;
г) $100a^2+mab+49b^2$;
д) $81a^4-36a^2b+mb^2$;
е) $25x^8-60x^4y^2+my^4$;
ж) $4a^{10}-36a^5b^3+81b^m$;
з) $16a^6+32a^mb^2+16b^4$?

121. При каком m можно представить в виде квадрата двучлена:

а) $(3x-5)^2+(4x+12)^2+mx$; б) $(17x+10)^2-(15x-6)^2+mx$?

122. Запишите в виде суммы или разности квадратов двух выражений:

а) x^2+b^2+2b+1; в) $4y^2-4y+1+p^2$; д) $b^2-6b+25$;
б) y^2-2y-z^2+1; г) x^2-c^2+6c-9; е) $a^2+2ab-c^2+12c+b^2-36$.

123. Разложите на множители:

а) $(4+c^2)^2-16c^2$; в) $144a^2-(14a^2+9)^2$;
б) $(x^2+9)^2-36x^2$; г) $400x^2-(25x^2+4)^2$.

124. Разложите на множители:

а) $x^2-2xy+y^2-25$; е) $25-a^2-4b^2+4ab$;
б) $b^2+6b+9-16c^2$; ж) $y^2-2y-z^2+2zu+1-u^2$;
в) $4a^2-4a+1-x^2$; з) $a^2+10a+24$;
г) $y^2-a^2-10a-25$; и) $4p^2-12p+5$;
д) $1-x^2-8xy-16y^2$; к) $9x^4-42x^2+33$.

125. Решите уравнение:

а) $(2x-1)^2-36=0$; г) $4x^2-12x+9=49$; ж) $x^2-10x+24=0$;
б) $(5-3x)^2-81=0$; д) $x^2+10x+24=0$; з) $x^2+2x-24=0$.
в) $x^2+2x+1=100$; е) $x^2-2x-24=0$;

126. Докажите, что если $x+b=1$, то $4b^2-(x^2-b^2-1)^2$ равно нулю.

127. Имеет ли хотя бы один корень уравнение:

а) $x^2+9=0$; в) $(x+7)^2+(x-3)^2=0$;
б) $(x-3)^2+7=0$; г) $(x-2)^2+(2x-4)^2=0$?

128. Решите уравнение:

а) $4x^2-12x+5=0$; д) $x^2+7x+12=0$; и) $x^4-16x^2=0$;
б) $9x^2-24x+15=0$; е) $x^2+6x+10=0$; к) $x^2-20x+64=0$.
в) $x^2-3x+2=0$; ж) $x^2+8x+16=0$;
г) $x^2-7x+12=0$; з) $x^2-10x+25=0$;

129. Решите уравнение:

а) $x^3+4x^2+3x=0$; б) $x^4-20x^2+64=0$.

130. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите ее:

а) $\dfrac{a^2+10a+25}{a^2-25}$; в) $\dfrac{a^2+2ac+c^2}{a^2-c^2}$; д) $\dfrac{x^2-12x+35}{x^2-10x+25}$;

б) $\dfrac{y^2-9}{y^2-6y+9}$; г) $\dfrac{b^2-4b+3}{b^2-9}$; е) $\dfrac{z^2-4z-21}{z^2-6z-7}$.

131. Найдите сумму дробей:

а) $\frac{x+2}{x^2+2x+1}-\frac{x-2}{x^2-1}$; в) $\frac{x-y}{x^2+2xy+y^2}-\frac{2x}{x^2-y^2}+\frac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$.

б) $\frac{a+3b}{a^2-2ab+b^2}+\frac{a-3b}{a^2-b^2}$;

132. Найдите произведение дробей и сократите его:

а) $\frac{x^2-12x+36}{x^2-64}\cdot\frac{x^2-16x+64}{x^2-36}$; б) $\frac{a^2-8a+15}{a^2-49}\cdot\frac{a^2-2a-35}{a^2-25}$.

133. Найдите частное дробей и сократите его:

а) $\frac{1-4a+4a^2}{15a^2}:\frac{4a^2-1}{5a^3}$; б) $\frac{25m^2-4n^2}{15mn}:\frac{25m^2+20mn+4n^2}{9m^2}$.

11. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ ДРОБИ

Пример 1.

Решим уравнение $\frac{6x}{3x-1}=\frac{2x+1}{x}$.

1-й способ. Перенесем все члены уравнения в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{6x}{3x-1}-\frac{2x+1}{x}=0,\qquad \frac{6x^2-(3x-1)(2x+1)}{(3x-1)x}=0.$$

Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Значит, надо найти корни уравнения

$$6x^2-(3x-1)(2x+1)=0,$$

при которых $x(3x-1)$ не обращается в нуль. Раскрывая скобки, получаем $-x+1=0$, откуда $x=1$. Так как $x(3x-1)$ не обращается в нуль при $x=1$, то 1 — корень уравнения.

2-й способ. По основному свойству пропорции получаем

$$6x\cdot x=(2x+1)(3x-1)$$

и потому $6x^2=6x^2+3x-2x-1$, $0=x-1$, $x=1$. Надо проверить, не обращаются ли при $x=1$ в нуль знаменатели $3x-1$ и x. Так как ни один из них при $x=1$ в нуль не обращается, то 1 — корень заданного уравнения.

Пример 2.

Решим уравнение $\frac{1}{y-3}+\frac{4}{y+1}=\frac{4}{(y-3)(y+1)}$.

Решение. Приведем выражения в левой и правой частях к общему знаменателю:

$$\frac{y+1+4(y-3)}{(y-3)(y+1)}=\frac{4}{(y-3)(y+1)}.$$

Дроби с одинаковыми и отличными от нуля знаменателями равны, если равны их числители. Значит, надо решить уравнение

$$y+1+4(y-3)=4$$

и выбрать его корни, при которых $(y-3)(y+1)$ отлично от нуля. Имеем $5y-11=4$, откуда $y=3$. Так как при $y=3$ выражение $(y-3)(y+1)$ обращается в нуль, данное уравнение корней не имеет.

УПРАЖНЕНИЯ

134. Решите уравнение:

а) $\frac{x-2}{3}-\frac{x+5}{4}=1$;

б) $\frac{2x+3}{5}+\frac{x-7}{2}=7$;

в) $\frac{x^2-4}{x}=\frac{3+2x}{2}$;

г) $\frac{x^2+5}{2x}=\frac{3x+10}{6}$;

д) $\frac{2x+3}{2x-1}=\frac{x-5}{x+3}$;

е) $\frac{1+3x}{1-3x}=\frac{5-2x}{1+2x}$;

ж) $\frac{1}{10y-1}=\frac{1}{2-5y}$;

з) $\frac{3}{3-5y}=\frac{5}{7-2y}$.

135. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{5}{y-2}-\frac{4}{y-3}=\frac{1}{y}$;

б) $\frac{3}{y-2}+\frac{7}{y+2}=\frac{10}{y}$;

в) $\frac{3}{2y-1}+\frac{7}{2y+1}=\frac{4-20y^2}{1-4y^2}$;

г) $\frac{y+5}{y^2-5y}-\frac{y-5}{2y^2-10y}=\frac{y+25}{2y^2-50}$.

136. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2}{x+5}=\frac{25}{x+5}$;

б) $\frac{2x^2}{2x-3}=\frac{3x}{2x-3}$;

в) $\frac{2x^2}{3x-5}=x$;

г) $\frac{1+x-6x^2}{3x+1}=x$.

137. Числитель дроби на 2 меньше ее знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 1, а знаменатель увеличить на 3, то значение дроби будет равно 0,25. Найдите дробь.

138. Знаменатель дроби на 5 больше числителя. Если числитель этой дроби увеличить на 1, а знаменатель оставить без изменения, то значение дроби будет равно $\frac{1}{3}$. Найдите дробь.

139. Моторная лодка прошла против течения реки 16 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 40 мин меньше, чем на путь против течения. Найдите собственную скорость лодки, зная, что скорость течения реки 2 км/ч.

140. Турист проплыл на байдарке по течению реки 24 км и затем вернулся обратно. На весь путь он затратил 7 ч. Какова скорость течения реки, если собственная скорость байдарки была 7 км/ч?

141. Две землечерпалки могут при совместной работе углубить дно реки за 12 дней. За сколько дней выполнила бы ту же работу каждая землечерпалка, работая одна, если известно, что производительность одной из них в 1,5 раза больше, чем другой?

142. Производительность станка с программным управлением в 5 раз выше, чем производительность обычного станка. Сколько дней потребуется для выполнения задания на обычном станке, если известно, что при одновременной работе на станке с программным управлением и обычном станке его можно выполнить за 3 дня?

143. Из города A в город B вышел поезд. Первые 450 км пути он шел медленнее, чем требовалось по расписанию, на 10 км/ч. На оставшемся участке пути протяженностью 750 км поезд шел быстрее на 8 км/ч, чем надо было по расписанию, и в результате прибыл в город B вовремя. Какова скорость поезда по расписанию?

144. От деревни Дубки до села Боровково a км. Обычно мальчик тратил на путь из Дубков столько же времени, сколько и на обратный путь. На этот раз он шел в Боровково со скоростью на 1,5 км/ч большей, чем обычно, а возвращался со скоростью на 1 км/ч меньшей, чем обычно. В результате он затратил на весь путь столько же времени, как и всегда. С какой скоростью ходил мальчик от деревни Дубки до села Боровково и обратно? Покажите, что ответ не зависит от расстояния.

145. На перелет от Москвы до Красноярска самолет тратит по расписанию столько же времени, сколько и на обратный путь. Из-за встречного ветра в Красноярск самолет летел со скоростью на 60 км/ч меньшей, чем полагается. В Москву он летел со скоростью на 70 км/ч большей, чем обычно. В результате на оба рейса вместе он затратил столько же времени, сколько полагалось по расписанию. Какова скорость самолета по расписанию?

12. ВОЗВЕДЕНИЕ В КУБ СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ ВЫРАЖЕНИЙ

Запишем $(a+b)^3$ в виде многочлена:

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$$
$$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Итак,

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \qquad (1)$$

Это тождество читается так: *куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе выражение плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго выражения плюс куб второго выражения.*

А теперь заменим в (1) b на $-b$:

$$(a-b)^3=(a+(-b))^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

(знак меняют слагаемые, содержащие нечетные степени b). Итак,

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \qquad (2)$$

Пример 1.

Найдем $5{,}1^3$ и $9{,}9^3$.

Решение. Имеем $5{,}1=5+0{,}1$ и потому

$$5{,}1^3=(5+0{,}1)^3=5^3+3\cdot 5^2\cdot 0{,}1+3\cdot 5\cdot 0{,}1^2+0{,}1^3=$$
$$=125+75\cdot 0{,}1+15\cdot 0{,}01+0{,}001=132{,}651.$$

Далее, $9{,}9=10-0{,}1$ и потому

$$9{,}9^3=(10-0{,}1)^3=10^3-3\cdot 10^2\cdot 0{,}1+3\cdot 10\cdot 0{,}1^2-0{,}1^3=$$
$$=1000-30+0{,}3-0{,}001=970{,}299.$$

Пример 2.

Заменим в тождестве (1) a на $2x^2$ и b на $3y$:

$$(2x^2+3y)^3=(2x^2)^3+3\cdot(2x^2)^2\cdot 3y+3\cdot 2x^2\cdot(3y)^2+(3y)^3=$$
$$=8x^6+3\cdot 4x^4\cdot 3y+3\cdot 2x^2\cdot 9y^2+27y^3=8x^6+36x^4y+54x^2y^2+27y^3.$$

Пример 3.

Представим в виде многочлена выражение $(5x^3-2y^2)^3$.

Решение. Это выражение получается из $(a-b)^3$ заменой a на $5x^3$ и b на $2y^2$. Поэтому

$$(5x^3-2y^2)^3=(5x^3)^3-3\cdot(5x^3)^2\cdot 2y^2+3\cdot 5x^3\cdot(2y^2)^2-(2y^2)^3=$$
$$=125x^9-150x^6y^2+60x^3y^4-8y^6.$$

Пример 4.

Запишем многочлен $216x^6+540x^4y^3+450x^2y^6+125y^9$ в виде куба двучлена.

Решение. Так как $216x^6=(6x^2)^3$ и $125y^9=(5y^3)^3$, то можно предположить, что

$$216x^6+540x^4y^3+450x^2y^6+125y^9=(6x^2+5y^3)^3.$$

Возводя правую часть в куб по формуле (1), убеждаемся в справедливости этого тождества.

УПРАЖНЕНИЯ

146. Преобразуйте в многочлен:

а) $(x+y)^3$; ж) $(3b-5)^3$; н) $(5a^2+ab)^3$;

б) $(p-q)^3$; з) $(6x-y)^3$; о) $(x^4-y^4)^3$;

в) $(a+10)^3$; и) $(x+4y)^3$; п) $\left(3a^2-\frac{1}{3}a\right)^3$;

г) $(4-b)^3$; к) $(x^2+y^2)^3$; р) $(10y^{10}-3z^3)^3$;

д) $(ab+1)^3$; л) $(2x^2-7a^2)^3$; с) $(x^{12}+2y^2)^3$;

е) $(2z-3)^3$; м) $(-a-4x)^3$; т) $\left(-\frac{2}{3}ab^2+1\frac{1}{2}b\right)^3$.

147. Преобразуйте в многочлен:

а) $(x+y)^3-x(x-y)^2$; в) $(a^2+1)^3+(a^2-1)^3$;

б) $(a-2)^3+a(a-3)^2$; г) $(ab+c^2)^3-(bc+a^2)^3$.

148. Докажите тождество:

а) $(-a-b)^3=-(a+b)^3$; в) $(ax+ay)^3=a^3(x+y)^3$;

б) $(a-b)^3=-(b-a)^3$; г) $(x^3+y^3)=(x+y)^3-3xy(x+y)$.

149. Докажите тождество:

а) $(m+n)^3=m(m-3n)^2+n(n-3m)^2$;

б) $(x^3+y^3)^2-(x^2+y^2)^3+3x^2y^2(x+y)^2=(2xy)^3$.

150. Решите уравнение:

а) $(y+1)^3-\frac{1}{4}y(2y+3)^2=7$;

б) $(4y-3)^3-y(8y-9)^2=0$.

151. Вычислите:

а) $1{,}2^3$; в) $4{,}9^3$; д) 1002^3; ж) 495^3;

б) $0{,}8^3$; г) $19{,}8^3$; е) 999^3; з) 81^3.

152. Запишите, если возможно, в виде куба двучлена:

а) $m^3+n^3+3m^2n+3mn^2$; ж) $-27x^9+27x^6-9x^3+1$;

б) x^3+3x^2+3x+1; з) $\frac{1}{27}b^6-\frac{1}{3}b^4c+b^2c^2-c^3$;

в) $p^3-3p^2q+3pq^2-q^3$; и) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$;

г) $8a^3-12a^2y+6ay^2-y^3$; к) $27x^6+27x^4y+9x^2y^2+y^3$;

д) $1000+300a+30a^2+a^3$; л) $125x^9-150x^6y^2+60x^3y^4-8y^6$;

е) $-b^3-12b^2-48b-64$; м) $216x^{15}+324x^{10}y^7+162x^5y^{14}+27y^{21}$.

153. Найдите значение выражения:

а) $3{,}7^3+3\cdot3{,}7^2\cdot1{,}3+3\cdot3{,}7\cdot1{,}3^2+1{,}3^3$;

б) $15{,}8^3-3\cdot15{,}8^2\cdot11{,}8+3\cdot15{,}8\cdot11{,}8^2-11{,}8^3$.

154. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^2+2xy+y^2}$; б) $\dfrac{a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6}{(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)}$.

155. Выполните указанные действия:

а) $\dfrac{x^2-y^2}{8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3}+\dfrac{x+y}{4x^2-4xy+y^2}$;

б) $\dfrac{x^3+y^3}{x^3-12x^2y+48xy^2-64y^3}-\dfrac{x^2+y^2}{x^2-8xy+16y^2}$.

156. Найдите произведение дробей:

а) $\dfrac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6}\cdot\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2-2xy+y^2}$;

б) $\dfrac{x^2+2y}{x^6+6x^4y+12x^2y^2+8y^3}\cdot\dfrac{x^4+4x^2y+4y^2}{x+y}$.

157. Найдите частное дробей:

а) $\dfrac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}:\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$;

б) $\dfrac{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3}{8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3}:\dfrac{4x^2-12xy+9y^2}{4x^2+12xy+9y^2}$.

13. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ СУММЫ И РАЗНОСТИ КУБОВ

Перенесем в формуле (1) п. 12 слагаемые $3a^2b$ и $3ab^2$ в левую часть равенства. Поменяв местами левую и правую части равенства, получим

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2.$$

Вынося в последних двух слагаемых за скобки $-3ab$, получаем

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)((a+b)^2-3ab).$$

После этого применим формулу квадрата суммы:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Итак, мы доказали равенство

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2). \qquad (1)$$

Выражение a^2-ab+b^2 похоже на правую часть формулы квадрата разности и отличается от нее лишь коэффициентом при ab. Это

выражение называют *неполным квадратом разности*. Поэтому формулу (1) читают следующим образом:

сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на неполный квадрат их разности.

Заменим в формуле (1) b на $-b$. Так как $(-b)^2=b^2$, $(-b)^3=-b^3$, то получаем

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2). \qquad (2)$$

Эту формулу читают так: *разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений на неполный квадрат их суммы* (неполный потому, что коэффициент при ab равен 1, а не 2).

Формула (2) имеет наглядный геометрический смысл. Возьмем куб со стороной a и удалим из него куб со стороной b (рис. 7, *а*). Получившееся тело разобьем на три части, показанные на рисунке 7, *б*. Каждая из этих частей является прямоугольным параллелепипедом, одно из ребер которого равно $a-b$. Основаниями этих параллелепипедов служат соответственно: квадрат со стороной a, прямоугольник со сторонами a и b и квадрат со стороной b. Значит, объем оставшегося тела равен a^3-b^3 (рис. 7, *а*) и

$$(a-b)a^2+(a-b)ab+(a-b)b^2$$

(рис. 7, *б*). Поэтому

$$a^3-b^3=(a-b)a^2+(a-b)ab+(a-b)b^2=$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

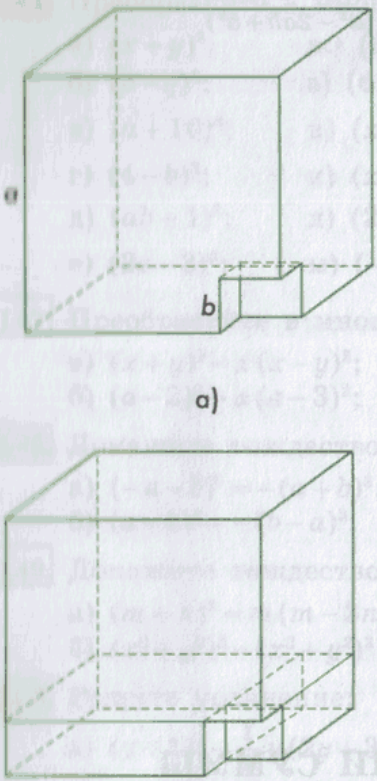


Рис. 7

Пример 1.

Разложим на множители многочлен:

а) $8x^3+27y^6$; б) $216a^9b^{12}-125x^6y^{15}$.

Решение. а) Так как $8x^3=(2x)^3$, $27y^6=(3y^2)^3$, то применим формулу (1), положив в ней $a=2x$, $b=3y^2$. Получаем

$$8x^3+27y^6=(2x)^3+(3y^2)^3=(2x+3y^2)((2x)^2-2x\cdot 3y^2+(3y^2)^2).$$

Раскрывая во втором множителе скобки, получим

$$8x^3+27y^6=(2x+3y^2)(4x^2-6xy^2+9y^4).$$

б) Имеем $216a^9b^{12}=(6a^3b^4)^3$ и $125x^6y^{15}=(5x^2y^5)^3$. Поэтому применим формулу (2), заменив в ней a на $6a^3b^4$ и b на $5x^2y^5$. Имеем

$$216a^9b^{12}-125x^6y^{15}=(6a^3b^4)^3-(5x^2y^5)^3=$$
$$=(6a^3b^4-5x^2y^5)((6a^3b^4)^2+6a^3b^4\cdot 5x^2y^5+(5x^2y^5)^2)=$$
$$=(6a^3b^4-5x^2y^5)(36a^6b^8+30a^3b^4x^2y^5+25x^4y^{10}).$$

УПРАЖНЕНИЯ

158. Преобразуйте в многочлен стандартного вида произведение:

а) $(x-3)(x^2+3x+9)$;
б) $(2x+1)(4x^2-2x+1)$;
в) $(3y-4)(9y^2+12y+16)$;
г) $(4a+5b)(16a^2-20ab+25b^2)$.

159. Разложите на множители двучлен:

а) x^3-27;
б) $8a^3-125$;
в) $216-343x^3$;
г) $a^3+\frac{1}{64}$;
д) $c^3-0{,}000001$;
е) $0{,}008b^3+125$;
ж) $0{,}064-27x^3y^6$;
з) $0{,}125-8a^9b^{15}$;
и) $729a^3b^9-64x^9y^{18}$.

160. Разложите на множители:

а) $(a+6)^3-1$;
б) $(y-3)^3+64$;
в) $(a^2+1)^3-a^6$;
г) $(5x^4+3)^3-125x^{12}$.

161. Сократите дробь:

а) $\frac{ab^2+a^3+a^2b}{a^3b-b^4}$;
б) $\frac{2a^4-54a}{2a^3+6a^2+18a}$;
в) $\frac{2a^6-128a^3}{(2a^2+8a+32)(a^4-4a^3)}$;
г) $\frac{4a^3b^2-16a^2b^3+16ab^4}{2a^4b^2-16ab^5}$.

162. Приведите к одному знаменателю дроби:

а) $\frac{2x}{y^3-x^3}$, $\frac{3y}{x^2y-xy^2}$, $\frac{1}{x^2y+xy^2+y^3}$; б) $\frac{4}{x^2-4}$, $\frac{x+3}{x^3+8}$, $\frac{3x-5}{x^2-2x+4}$.

163. Найдите числовое значение выражения, сначала упростив его:

а) $\frac{3c^2-c+3}{c^3-1}-\frac{c-1}{c^2+c+1}+\frac{2}{1-c}$ при $c=1{,}5$;

б) $\left(1+\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{b^3}{a^3-b^3}$ при $a=3$, $b=7$.

164. Выполните умножение:

а) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$;
б) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$;
в) $(8a-11b)(64a^2+88ab+121b^2)$;
г) $(9a^2x^2-21axy+49y^2)(3ax+7y)$;
д) $(x^4+x^2y^2+y^4)(x^2-y^2)$.

165. Выполните указанные действия:

а) $\dfrac{6x^2y}{x^2-xy+y^2}-\dfrac{3xy}{x+y}+\dfrac{8x^2y^2}{x^3+y^3}$; б) $\dfrac{xy}{3x^2+y^2}+\dfrac{x^3y-xy^3}{9x^4-3x^2y^2+y^4}+\dfrac{9x^3y^3}{27x^6+y^6}$.

166. Умножьте дроби и сократите произведение:

а) $\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\cdot\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}$; б) $\dfrac{8a^6-27b^6}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}\cdot\dfrac{a+b}{4a^4+6a^2b^2+9b^4}$;

в) $\dfrac{125x^9+\dfrac{8}{27}y^{15}}{4a^4+10a^2b^6+25b^{12}}\cdot\dfrac{8a^6-125b^{18}}{5x^3+\dfrac{2}{3}y^5}$.

167. Разделите дроби и сократите частное:

а) $\dfrac{a^6-b^6}{a^6+b^6}:\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{(a^2+b^2)^2}$; б) $\dfrac{216a^{12}+343b^9}{0{,}027x^6-0{,}512y^{21}}:\dfrac{6a^4+7b^3}{0{,}09x^4+0{,}24x^2y^7+0{,}64y^{14}}$.

168. Какими числами надо заменить звездочки, чтобы равенство

$$(6a^*+3b^*)(36a^{12}-18a^6b^5+9b^{10})=216a^{18}+27b^{15}$$

стало тождеством?

14. ФОРМУЛА ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ РАЗНОСТИ СТЕПЕНЕЙ

Выражения a^2-b^2 и a^3-b^3 можно разложить на множители по формулам

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b), \qquad (1)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2). \qquad (2)$$

С помощью формулы (1) можно разложить на множители выражение a^4-b^4:

$$a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2).$$

Если в этом разложении перемножить $a+b$ и a^2+b^2, то получим

$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3). \qquad (3)$$

Рассмотренные примеры наводят на мысль, что для любого натурального числа n верно равенство

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+a^{n-k}b^{k-1}+...+ab^{n-2}+b^{n-1}). \qquad (4)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого предположения, раскроем в правой части равенства (4) скобки и приведем подобные члены. При раскрытии скобок будем писать вслед за произведением некоторого слагаемого на a его произведение на $-b$. Получим

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})=$$
$$=a^n-\underline{a^{n-1}b}+\underline{a^{n-1}b}-a^{n-2}b^2+\ldots+a^2b^{n-2}-\underline{\underline{ab^{n-1}}}+\underline{\underline{ab^{n-1}}}-b^n.$$

После приведения подобных слагаемых в сумме остаются первое и последнее слагаемые, т. е. a^n-b^n.

Равенство (4) доказано.

Если n — нечетное число, $n=2m+1$, то из полученного равенства можно вывести новое, заменив в нем b на $-b$. Так как при четном k имеем $a^{n-k}(-b)^k=a^{n-k}b^k$, а при нечетном k имеем $a^{n-k}(-b)^k=-a^{n-k}b^k$, то получаем тождество

$$a^{2m+1}+b^{2m+1}=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b+\ldots+(-1)^k a^{2m-k}b^k+\ldots+b^{2m}). \qquad (5)$$

Во втором множителе правой части знаки слагаемых чередуются, причем первый и последний знаки положительны.

Полагая в формулах (4) и (5) $b=1$, выводим, что

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a^{n-k}+\ldots+1);$$
$$a^{2m+1}+1=(a+1)(a^{2m}-a^{2m-1}+\ldots+(-1)^k a^{2m-k}+\ldots+1).$$

Пример.

Разложим на множители многочлен $32x^{10}-243y^{15}$.

Решение. Так как $32x^{10}=(2x^2)^5$, $243y^{15}=(3y^3)^5$, то по формуле (4) имеем

$$32x^{10}-243y^{15}=(2x^2)^5-(3y^3)^5=$$
$$=(2x^2-3y^3)((2x^2)^4+(2x^2)^3\cdot 3y^3+(2x^2)^2\cdot(3y^3)^2+2x^2\cdot(3y^3)^3+(3y^3)^4)=$$
$$=(2x^2-3y^3)(16x^8+24x^6y^3+36x^4y^6+54x^2y^9+81y^{12}).$$

УПРАЖНЕНИЯ

169. Разложите на множители выражение:

а) x^7-y^7; в) $2^{11}a^{11}+3^{11}b^{22}$;

б) $64x^6-729y^6$; г) $1024a^{20}+243^2b^{30}$.

170. Упростите выражение:

а) $(4x-5y)(256x^4+320x^3y+400x^2y^2+500xy^3+625y^4)$;

б) $(x^2+y^3)(x^6-x^4y^3+x^2y^6-y^9)$;

в) $(2a^2-0{,}3b^3)(16a^8+2{,}4a^6b^3+0{,}36a^4b^6+0{,}054a^2b^9+0{,}0081b^{12})$;

г) $(0{,}2a^2b+0{,}3xy^2)(0{,}00032a^{10}b^5-0{,}00048a^8b^4xy^2+$
$+0{,}00072a^6b^3x^2y^4-0{,}00108a^4b^2x^3y^6+0{,}00162a^2bx^4y^8-$
$-0{,}00243x^5y^{10})$.

171. Найдите значение выражения $1+ab^2+a^2b^4+a^3b^6+a^4b^8$ при $a=3$, $b=-2$.

172. Найдите значение дроби $\dfrac{1+x+x^2+x^3+x^4}{1+x+x^2+x^3}$ при $x=3$.

173. Выполните указанные действия:

$$\frac{x}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}+\frac{4x(1+2x^2)}{1-x^3}-\frac{6x^3+1}{1+x^3}.$$

15. ФОРМУЛА КВАДРАТА СУММЫ НЕСКОЛЬКИХ СЛАГАЕМЫХ

Раскроем скобки в выражении $(a+b+c)^2$:

$$(a+b+c)^2=((a+b)+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Итак,

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Видим, что справа стоит сумма квадратов всех слагаемых и удвоенных попарных произведений этих слагаемых. Вообще для любого n имеем

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_{n-1}a_n. \quad (1)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого тождества, достаточно раскрыть скобки в левой части равенства и привести подобные члены: каждый квадрат будет иметь коэффициент 1, а каждое произведение различных слагаемых встретится дважды и будет иметь коэффициент 2.

Пример 1.

Раскроем скобки в выражении $(x^2+2y^2+3z^2)^2$.

Решение. По формуле (1) имеем

$$(x^2+2y^2+3z^2)^2=(x^2)^2+(2y^2)^2+(3z^2)^2+2x^2\cdot 2y^2+2x^2\cdot 3z^2+2\cdot 2y^2\cdot 3z^2.$$

Выполняя умножение одночленов, находим, что

$$(x^2+2y^2+3z^2)^2=x^4+4y^4+9z^4+4x^2y^2+6x^2z^2+12y^2z^2.$$

Пример 2.

Разложим на множители многочлен

$$4x^4y^2+9x^2y^4+12x^3y^3-16x^2y-24xy^2+16.$$

Решение. Замечаем, что $4x^4y^2=(2x^2y)^2$, $9x^2y^4=(3xy^2)^2$, $16=(-4)^2$, $12x^3y^3=2\cdot 2x^2y\cdot 3xy^2$, $-16x^2y=2\cdot 2x^2y\cdot(-4)$, $-24xy^2=2\cdot 3xy^2\cdot(-4)$. Поэтому $4x^4y^2+9x^2y^4+12x^3y^3-16x^2y-24xy^2+16=(2x^2y+3xy^2-4)^2$.

Пример 3.

Разложим на множители многочлен

$$4x^4y^2+9x^2y^4+12x^3y^3-16x^2y-24xy^2+12.$$

Решение. Используя результат примера 2, имеем

$$4x^4y^2+9x^2y^4+12x^3y^3-16x^2y-24xy^2+12=$$
$$=4x^4y^2+9x^2y^4+12x^3y^3-16x^2y-24xy^2+16-4=$$
$$=(2x^2y+3xy^2-4)^2-2^2=(2x^2y+3xy^2-2)(2x^2y+3xy^2-6).$$

УПРАЖНЕНИЯ

174. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(1+3x+2y-z)^2$;

б) $(x^2-3y^2+2z^2)^2$;

в) $(1+2a^2b+4ab^2)^2$;

г) $\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}a^2-\frac{7}{11}b^2\right)^2$;

д) $(2+5a^2-6b^2+7c^2)^2$;

е) $(a^3+b^3+c^3)^2+(2a^3+3b^3+4c^3)^2$;

ж) $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$.

175. Представьте в виде квадрата многочлена:

а) $x^6+4y^{10}+16z^{12}-4x^3y^5-8x^3z^6+16y^5z^6$;

б) $25a^8b^4+36a^4b^8+49x^{10}+60a^6b^6+70a^4b^2x^5+84a^2b^4x^5$.

176. Замените букву M одночленом так, чтобы получился квадрат многочлена:

а) $x^4+y^4+z^8-2x^2y^2+2x^2z^4+M$;

б) $64a^{12}b^6+100x^8y^8+M+160a^6b^3x^4y^4-80a^9b^3x^4-100a^3x^8y^4$.

177. Сложите дроби

$$\frac{2ab+3bc}{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}+\frac{4a-b}{a+b+c}.$$

16. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В первых двух главах учебника мы изучали алгебраические дроби и многочлены. И те и другие состоят из чисел и букв, связанных между собой арифметическими действиями: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень. Поэтому для них в алгебре вводится единый термин: *рациональное алгебраическое выражение* (чаще просто: *рациональное выражение*). При этом многочлен — *целое рациональное выражение*, т. е. это рациональное выражение, в котором нет действия деления на выражение, содержащее буквы. Если же такое действие присутствует, то рациональное выражение называют *дробно-рациональным выражени*

ем. Заметим, что в результате сокращения дробно-рациональное выражение может стать целым рациональным выражением. Например,

$$\frac{x^3+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=x^2-x+1.$$

При этом может возникнуть вопрос: каким считать выражение $\frac{x^3+1}{x+1}$ — дробно-рациональным или целым? Условились рациональные выражения разделять на дробные и целые по виду, в котором они заданы до преобразований. Поэтому $\frac{x^3+1}{x+1}$ — дробно-рациональное выражение, а x^2-x+1 — целое рациональное выражение, несмотря на то что эти два выражения тождественно равны для всех значений x, кроме $x=-1$. При $x=-1$ данная рациональная дробь не имеет значения.

Напомним, что в 7 классе тождеством мы называли равенство, верное при любых допустимых значениях переменных, а выражения, стоящие в левой и правой частях такого равенства, называли **тождественно равными**. При этом условились тождеством считать и верное числовое равенство.

Ранее мы встречались с многочисленными примерами тождеств. Простейшими и в то же время основными алгебраическими тождествами являются равенства, определяющие основные законы арифметических действий:

$$a+b\equiv b+a,\ (a+b)+c\equiv a+(b+c),$$
$$ab\equiv ba,\ (ab)c\equiv a(bc),\ (a+b)c\equiv a\cdot c+b\cdot c.$$

(В тех случаях, когда хотят подчеркнуть, что данное равенство является тождеством, используется знак «≡» вместо знака «=».) Другими примерами тождеств являются формулы сокращенного умножения, рассмотренные нами в предыдущих пунктах:

$(a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2$, $a^2-b^2\equiv(a-b)(a+b)$, $a^3+b^3\equiv(a+b)(a^2-ab+b^2)$ и др.

В приведенных примерах одно выражение заменяется другим, тождественно равным ему. Такие замены называют тождественными преобразованиями.

Всякую замену одного выражения на другое тождественно равное ему выражение называют тождественным преобразованием.

К тождественным преобразованиям относятся, например, выполнение операций сложения, вычитания, умножения, а также вынесение общих множителей за скобку, разложение на множители, приведение алгебраических дробей к общему знаменателю, сокращение алгебраических дробей, приведение подобных членов. При этом следует учесть, что сокращение дробей и приведение подобных членов могут изменить область допустимых значений переменных.

Пример 1.

Упростим выражение $\frac{2x^2+x}{x}+\frac{x+4}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}$.

Решение. $\frac{2x^2+x}{x}+\frac{x+4}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}=\frac{x(2x+1)}{x}+\frac{x+4}{(x-4)(x+4)}-\frac{1}{x-4}=2x+1+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-4}=2x+1.$

В результате тождественных преобразований получили выражение $2x+1$, для которого допустимо любое значение x. В то же время в исходном выражении допустимы все значения x, кроме $x=0$, $x=-4$, $x=4$. Поэтому полученное равенство будет тождественным только для $x\neq 0$, $x\neq -4$, $x\neq 4$.

При доказательстве тождеств используют различные приемы:

1) с помощью тождественных преобразований левую часть приводят к правой или наоборот;

2) с помощью тождественных преобразований обе части приводят к одному выражению;

3) одно из выражений переносят в другую часть и доказывают, что полученная таким образом разность тождественно равна нулю.

Какой из этих приемов использовать, зависит от доказываемого тождества.

Пример 2.

Докажем тождество $\left(\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}\right):\frac{2x^2+x+1}{x+1}=\frac{1}{x-3}$.

Решение. Преобразуем левую часть равенства, выполнив указанные действия в порядке, определяемом очередностью операций. Первыми выполняются действия умножения и деления, затем сложения и вычитания. При этом сначала производят действия в скобках:

$$\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)},$$

$$\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{x(x+1)+x^2+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)},$$

$$\left(\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}\right):\frac{2x^2+x+1}{x+1}=\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)}:\frac{2x^2+x+1}{x+1}=$$

$$=\frac{(2x^2+x+1)(x+1)}{(x+1)(x-3)(2x^2+x+1)}=\frac{1}{x-3}.$$

Итак, с помощью тождественных преобразований мы левую часть равенства привели к виду правой его части. Заметим, что доказанное

тождество справедливо при всех значениях x, кроме тех, при которых знаменатели обращаются в нуль, т. е. кроме корней уравнений

$$x-3=0,\ x^3+1=0,\ 2x^2+x+1=0.$$

Последнее уравнение корней не имеет, так как

$$2x^2+x+1=2\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)+1=$$

$$=2\left(x^2+2\cdot\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)+1=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\neq 0$$

ни при каких значениях x. Корень первого уравнения $x_1=3$. Для решения второго уравнения разложим на множители левую часть: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$ — и решим два уравнения: $x+1=0$ и $x^2-x+1=0$.

Корень одного уравнения $x_2=-1$, а другое уравнение корней не имеет. Итак, доказанное тождество имеет место для всех значений x, кроме $x=3$ и $x=-1$.

Пример 3.

Докажем тождество $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}$.

Решение. Перенесем $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}$ в левую часть равенства и докажем, что полученная разность равна нулю:

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)=0.$$

Найдем разность $\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{x}=\frac{1-(x+1)}{x(x+1)}=-\frac{1}{x+1}$.

Затем найдем разность $\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{x+2}$.

Теперь найдем разность $\frac{1}{(x+2)(x+3)}-\frac{1}{x+2}=\frac{1-(x+3)}{(x+2)(x+3)}=-\frac{1}{x+3}$.

Окончательно получаем $-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}=0$. Доказанное тождество справедливо для всех значений x, при которых знаменатели не обращаются в нуль, т. е. для $x\neq 0,\ -1,\ -2,\ -3$.

В некоторых случаях рассматривают условные тождества, т. е. равенства, верные при выполнении некоторых условий, налагаемых на переменные.

Пример 4.

Докажем, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Решение. Из условия $a+b+c=0$ находим $a=-b-c$. Тогда $a^3+b^3+c^3=(-b-c)^3+b^3+c^3=-b^3-3b^2c-3bc^2-c^3+b^3+c^3=3bc(-b-c)=$ $=3abc$.

УПРАЖНЕНИЯ

178. Докажите тождество:

а) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$;

б) $(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=x^2+y^2+z^2$;

в) $(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ad-cb)^2$;

г) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$;

д) $1+\frac{1}{a}+\frac{a+1}{ab}+\frac{(a+1)(b+1)}{abc}+\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abcd}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd}$;

е) $4((a^2-b^2)cd+(c^2-d^2)ab)^2+((a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd)^2=$
$=(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2$;

ж) $\frac{a^2b^2c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)}+\frac{a^2b^2d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)}+\frac{a^2c^2d^2}{(a-b)(c-b)(d-b)}+$
$+\frac{b^2c^2d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}=abc+abd+acd+bcd$;

з) $(a+b)(b+c)(c+a)-8abc=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$.

179. Докажите, что:

а) если $a+b+c=0$, то

$$(a^2-bc)^3+(b^2-ca)^3+(c^2-ab)^3=3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab);$$

б) если $yz+xz+xy=0$, то

$$(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2+2x^2y^2z^2=x^4(y+z)^2+y^4(x+z)^2+z^4(x+y)^2;$$

в) если $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$, $z=\frac{c-a}{c+a}$, то

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z).$$

180. Упростите выражение:

а) $\left(a^2-b^2-\frac{4a^2b-4ab^2}{a+b}\right):\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b-a}+\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$;

б) $\frac{x+7}{x+9}+\left(\frac{x+7}{x^2-18x+81}+\frac{x+5}{x^2-81}\right):\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^2$;

в) $\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}-\frac{1}{b(abc+a+c)}$;

г) $\frac{\left(\frac{(a+b)^2}{4ab}-1\right)\left(\frac{(a-b)^2}{4ab}+1\right)}{(a+b)^3-3ab(a+b)}\cdot\frac{(ab+(a-b)^2)((a+b)^2-ab)}{(a-b)^3+3ab(a-b)}$;

д) $\dfrac{x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)}{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}$;

е) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{2x(x-1)^2}{x^4+x^2+1}+\dfrac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8+x^4+1}$;

ж) $a(x+y)+\dfrac{\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{1}{a-y}+\dfrac{x}{(a-x)^2}-\dfrac{y}{(a-y)^2}}{\dfrac{1}{(a-y)(a-x)^2}-\dfrac{1}{(a-x)(a-y)^2}}$.

17*. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Обозначим многочлен от переменных x и y через $P(x, y)$. Тогда $P(y, x)$ означает многочлен, получаемый заменой в $P(x, y)$ переменной x на y, а y на x. Например, если $P(x, y)=6x^4-3x^3y+7xy^3+8y^4$, то $P(y, x)=6y^4-3y^3x+7yx^3+8x^4$.

Если выполняется равенство $P(x, y)=P(y, x)$, то многочлен $P(x, y)$ называют *симметрическим*. Например, симметрическими являются многочлены $x+y$ и xy. В самом деле, при замене x на y и y на x из $x+y$ получается равный ему многочлен $y+x$, а из xy — равный ему одночлен yx.

Введем обозначения $\sigma_1=x+y$, $\sigma_2=xy$ и назовем σ_1 и σ_2 *элементарными симметрическими многочленами от x и y*. Симметрическими являются и многочлены $S_n=x^n+y^n$ — при замене x на y и y на x они переходят в равные им многочлены y^n+x^n.

Пусть $f(u, v)$ — любой многочлен от u и v. Заменим в этом многочлене переменную u на $x+y$, а переменную v на xy. Получим многочлен $P(x, y)=f(x+y, xy)$, причем ясно, что этот многочлен симметрический. Оказывается, таким образом можно получить любой симметрический многочлен от двух переменных. Иными словами, верна теорема:

Теорема 1. Для любого симметрического многочлена $P(x, y)$ от x и y существует такой многочлен $f(u, v)$ от u и v, что

$$P(x, y)=f(x+y, xy).$$

Таким образом, любой симметрический многочлен от двух переменных x и y можно выразить в виде многочлена от $\sigma_1=x+y$ и $\sigma_2=xy$.

Покажем, как получают такое выражение, на примере симметрического многочлена

$$P(x, y)=2x^4-3x^3y+5x^2y^2-3xy^3+2y^4.$$

Сначала сгруппируем симметричные друг другу слагаемые и вынесем за скобки общие множители. Получим

$$P(x, y)=(2x^4+2y^4)-(3x^3y+3xy^3)+5x^2y^2=2(x^4+y^4)-3xy(x^2+y^2)+5x^2y^2.$$

Так как $xy=\sigma_2$, $x^2y^2=\sigma_2^2$, то получаем

$$P(x, y)=2(x^4+y^4)-3\sigma_2(x^2+y^2)+5\sigma_2^2. \quad (1)$$

Нам осталось выразить через элементарные симметрические многочлены σ_1 и σ_2 суммы x^2+y^2 и x^4+y^4. Так как $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, то $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\sigma_1^2-2\sigma_2$. Значит,

$$x^2+y^2=\sigma_1^2-2\sigma_2. \quad (2)$$

Чтобы получить выражение для x^3+y^3, умножим обе части равенства (2) на $x+y=\sigma_1$. Получаем $(x+y)(x^2+y^2)=\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)$. Значит, $x^3+x^2y+xy^2+y^3=\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2$ и потому $x^3+y^3=\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-x^2y-xy^2=\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-xy(x+y)=\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_1=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$.

Итак,

$$x^3+y^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2. \quad (3)$$

Таким же образом находим выражение для x^4+y^4. Именно, умножим обе части равенства (3) на $x+y=\sigma_1$. Получаем

$$(x+y)(x^3+y^3)=\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2).$$

Значит, $x^4+x^3y+xy^3+y^4=\sigma_1^4-3\sigma_1^2\sigma_2$. Поэтому

$$x^4+y^4=\sigma_1^4-3\sigma_1^2\sigma_2-x^3y-xy^3=\sigma_1^4-3\sigma_1^2\sigma_2-xy(x^2+y^2).$$

Применяя формулу (2), получаем

$$x^4+y^4=\sigma_1^4-3\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2.$$

Итак,

$$x^4+y^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2. \quad (4)$$

Применяя формулы (2) и (4), а также равенство (1), выводим, что

$$P(x, y)=2(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)-3\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+5\sigma_2^2=2\sigma_1^4-11\sigma_1^2\sigma_2+15\sigma_2^2.$$

Предоставляем читателю доказать равенства

$$x^5+y^5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2 \quad (5)$$

и

$$x^6+y^6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2+2\sigma_2^3. \quad (6)$$

Определим теперь понятие симметрического многочлена от трех переменных x, y, z. Три переменные можно переставлять друг с другом шестью различными способами:

$$(x, y, z), (x, z, y), (y, x, z), (y, z, x), (z, x, y), (z, y, x).$$

Назовем многочлен $P(x, y, z)$ *симметрическим*, если он не меняется при всех перестановках переменных, т. е. если

$$P(x, y, z)=P(x, z, y)=P(y, x, z)=P(y, z, x)=P(z, x, y)=P(z, y, x).$$

Примерами таких многочленов могут служить

$$\sigma_1=x+y+z,\ \sigma_2=xy+xz+yz,\ \sigma_3=xyz.$$

Все эти многочлены являются соответственно коэффициентами при t^2, t и свободным членом в многочлене от t, получающемся при раскрытии скобок в выражении

$$(t+x)(t+y)(t+z).$$

Симметрическими многочленами являются и суммы

$$S_n=x^n+y^n+z^n.$$

Справедлива теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. Любой симметрический многочлен от переменных x, y, z может быть выражен в виде многочлена от σ_1, σ_2, σ_3.

Мы не будем проводить доказательство этой теоремы и укажем лишь выражения через σ_1, σ_2, σ_3 для сумм $S_2=x^2+y^2+z^2$ и $S_3=x^3+y^3+z^3$. В силу равенства (1) п. 15 имеем

$$S_2=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=\sigma_1^2-2\sigma_2. \qquad (7)$$

Далее

$$\sigma_1^3=(x+y+z)^3=(x+y+z)(x+y+z)^2=$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)=$$
$$=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3x^2z+3xz^2+3y^2z+3yz^2+6xyz=$$
$$=x^3+y^3+z^3+3xy(x+y+z)+3xz(x+y+z)+3yz(x+y+z)-3xyz=$$
$$=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz=S_3+3\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3.$$

Поэтому

$$S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3. \qquad (8)$$

Из формулы (8) вытекает тождество

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=S_3-3\sigma_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2).$$

Подставляя значения σ_1 и σ_2 и пользуясь формулой (1) п. 15, получаем тождество

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz). \qquad (9)$$

Теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2, справедливы для симметрических многочленов от любого числа переменных.

УПРАЖНЕНИЯ

181. Выразите через σ_1 и σ_2 суммы S_5, S_6, S_7, S_8 (для двух переменных).

182. Разложите на множители (выразите через σ_1 и σ_2):

а) $10x^4-27x^3y-110x^2y^2-27xy^3+10y^4$;

б) $2x^4+7x^3y+9x^2y^2+7xy^3+2y^4$.

183. Разложите на множители:

а) $2x^4+3x^3y+6x^2y^2+3xy^3+2y^4$;

б) $3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4$.

184. Сократите дробь $\dfrac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^5-x^5-y^5}$. Указание. Выразите числитель и знаменатель через σ_1 и σ_2.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

185. При каких значениях x и y имеет значение выражение

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{xy}{(x-2)^2+(y+3)^2}?$$

186. При каких значениях переменных верны равенства:

а) $\dfrac{x^3+1}{x+1}=x^2-x+1$;

б) $\dfrac{12a^2-8a}{4a}=3a-2$;

в) $\dfrac{6x^3-12x^2}{-3x^2}=4-2x$;

г) $\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$;

д) $\dfrac{c^2+2c+1}{c^2-1}=\dfrac{c-1}{c+1}$;

е) $\dfrac{a^4-1}{a^2-\dfrac{1}{a^2}}=a^2$;

ж) $\dfrac{a-1}{a^2+1}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{2a}=\dfrac{a-1}{a^2+1}$?

187. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^{n+2}-2x^n+x^{n-2}}{x^{n+2}-x^{n+1}+x^{n-1}-x^{n-2}}$;

б) $\dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}$;

в) $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x-y)(x^3-y^3)}$;

г) $\dfrac{x^6-1}{x^4+x^2+1}$.

188. Выполните действия:

а) $\dfrac{14a^4}{5xy}\cdot\dfrac{10x^2y^3}{21a^2b^3}$;

б) $\dfrac{x^2y^2-4y^2}{4xy}\cdot\dfrac{x^2y}{2xy-x^2y}$;

в) $\dfrac{x^3+y^3}{x-y}\cdot\dfrac{x^3-y^3}{x+y}$;

г) $\dfrac{ac+m^2-m(a+c)}{bc+m^2+m(b+c)}\cdot\dfrac{b^2-m^2}{a^2-m^2}$;

д) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2-2xy}\cdot\dfrac{x-y}{xy+x^2}$;

е) $\left(\dfrac{2x}{1-3y}+\dfrac{2x}{3y+1}\right):\dfrac{4x^2+14x}{9y^2+1-6y}$;

ж) $\dfrac{3y^2}{x^4-xy^3}+\dfrac{y}{x^3+x^2y+xy^2}-\dfrac{1}{x^2-xy}$;

з) $\dfrac{\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}}{\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}}\cdot\dfrac{a}{b}$;

и) $\dfrac{\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{a}}:\left(1-\dfrac{x^2+y^2-a^2}{2xy}\right)$;

к) $\dfrac{2}{4x-x^2}+\left(\dfrac{1}{x^2-4x}+\dfrac{2}{16-x^2}+\dfrac{1}{16+4x}\right)\cdot\left(\dfrac{x+4}{x-4}\right)^2$;

л) $\dfrac{2x}{b+x}+\left(\dfrac{2y}{(x-b)^2}-\dfrac{2y}{x^2-b^2}\right):\dfrac{y}{(x-b)^2}$;

м) $\left(\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2\right)\right):\left(\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{x}{x-y}\right)$.

189. Выполните действия:

$$\left(\frac{b^2-bc+c^2}{a}+\frac{a^2}{b+c}-\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)\cdot\frac{\frac{2}{b}+\frac{2}{c}}{\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}}+(a+b+c)^2.$$

1) $3(a^2+b^2+c^2)$; 2) $2(a^2+b^2+c^2)$; 3) $a+b+c$; 4) $(a+b+c)^2$.

190. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\dfrac{b^2-c^2}{a}+\dfrac{c^2-a^2}{b}+\dfrac{a^2-b^2}{c}}{\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}}$;

б) $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$;

в*) $\dfrac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$;

г*) $\dfrac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$; д*) $\dfrac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}$.

191. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{(p+q)^3}\left(\dfrac{1}{p^3}+\dfrac{1}{q^3}\right)+\dfrac{3}{(p+q)^4}\left(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}\right)+\dfrac{6}{(p+q)^5}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\right)$;

1) p^3q^3; 2) p^2q^2; 3) $\dfrac{1}{p^3q^3}$; 4) $\dfrac{1}{p^2q^2}$;

б) $\dfrac{1}{(p+q)^3}\left(\dfrac{1}{p^4}-\dfrac{1}{q^4}\right)+\dfrac{2}{(p+q)^4}\left(\dfrac{1}{p^3}-\dfrac{1}{q^3}\right)+\dfrac{2}{(p+q)^5}\left(\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{q^2}\right)$.

192*. Пусть $m=\frac{x-y}{x+y}$, $p=\frac{y-z}{y+z}$, $q=\frac{z-u}{z+u}$, $z=\frac{u-v}{u+v}$, $s=\frac{v-w}{v+w}$, $t=\frac{w-x}{w+x}$. Докажите, что $(1+m)(1+p)(1+q)(1+z)(1+s)(1+t)=$ $=(1-m)(1-p)(1-q)(1-z)(1-s)(1-t)$.

193*. Пусть $a+b+c+d=A$, $a+b-c-d=B$, $a-b+c-d=C$, $a-b-c+d=D$. Докажите, что если $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$, то

$$AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2).$$

194*. Докажите, что из равенства

$$(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$$

вытекает $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (при $c\neq 0$, $d\neq 0$).

195*. Упростите выражение $\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}$ при условии $ax+by+cz=0$.

196. Докажите, что $\frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2}+\frac{(x^2-a^2)(y^2-a^2)(z^2-a^2)}{a^2(a^2-b^2)}+\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-a^2)}=$ $=x^2+y^2+z^2-a^2-b^2$.

197*. Положим $\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}=S_k$. Докажите, что

$$S_0=S_1=0,\ S_2=1,\ S_3=a+b+c,\ S_4=a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc,$$
$$S_5=a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+abc.$$

198*. Пусть $\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)(c-d)}+$ $+\frac{d^k}{(d-a)(d-b)(d-c)}=S_k^*$. Докажите, что

$$S_0^*=S_1^*=S_2^*=0,\ S_3^*=1,\ S_4^*=a+b+c+d.$$

199*. Вычислите σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, где

$$\sigma_m=a^m\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+b^m\frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+c^m\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}.$$

200. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

б) $\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b^2(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$.

201. Докажите, что

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

202. Упростите выражение $\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

203*. Докажите, что из равенства $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ при нечетном m вытекает равенство $\frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}=\frac{1}{a^m+b^m+c^m}$.

204*. Докажите, что если справедливо $a^3+b^3+c^3=(b+c)(a+c)(a+b)$ и $(b^2+c^2-a^2)x=(c^2+a^2-b^2)y=(a^2+b^2-c^2)z$, то

$$x^3+y^3+z^3=(x+y)(x+z)(y+z).$$

205. Докажите, что сумма дробей $\frac{b-c}{1+bc}$, $\frac{c-a}{1+ac}$, $\frac{a-b}{1+ab}$ равна их произведению.

206. Докажите, что выражение $\frac{x^{3n}}{x^n-1}-\frac{x^{2n}}{x^n+1}-\frac{1}{x^n-1}+\frac{1}{x^n+1}$ тождественно равно многочлену от x.

207. Представьте выражение

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)+\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2)$$

в виде многочлена от a, b, c.

208. Проверьте формулу:

а) $\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}=1$;

б) $\frac{x^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(b^2-z^2)y^2}{(y^2-b^2)b^2(c^2-b^2)}+\frac{(x^2-c^2)(c^2-z^2)y^2}{(c^2-y^2)c^2(c^2-b^2)}=\frac{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}{(y^2-b^2)(y^2-c^2)}$;

в) $\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(x+b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}=$

$=\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

209. Упростите выражение

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a+b+(1+ab)x}{1+ab+(a+b)x}\right)^2}\cdot\frac{(1+ab)(1+ab+(a+b)x)-(a+b)(a+b+(1+ab)x)}{(1+ab+(a+b)x)^2}.$$

210. Проверьте пропорцию $\frac{\frac{c}{a+b}-\frac{c}{a+2b}}{\frac{c}{a+2b}-\frac{c}{a+3b}}=\frac{\frac{c}{a+b}}{\frac{c}{a+3b}}$.

211. Докажите, что*):

а) $(8^5+2^{11}):17$; в) $(19^{19}+69^{19}):44$;

б) $(69^2-69\cdot 5):32$; г) $(328^3+172^3):2000$.

212. Упростите выражение:

а) $(x+2y^2)^2-(x-2y^2)^2$; г) $(4x+y-1)^4-(4x-y+1)^4$;

б) $(2m-n)(4m^2+2mn+n^2)$; д) $(2+x)^5-(2-x)^5$.

в) $\left(\frac{b}{2}+y\right)^3+\left(\frac{b}{2}-y\right)^3$;

213*. Представьте в виде степени двучлена выражение:

а) $(x+y)^2+2(x+y)+1$;

б) $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz$;

в) $(a-b)^2+2ac+2(a-b)-2bc+(c+1)^2$.

214. Вычислите:

а) $\frac{181^2-61^2}{319^2-209^2}$; б) 256^2-44^2.

215. Докажите, что:

а) $(8^7-2^{18}):14$; б) $(79^2+79\cdot 11):18$; в) $(36^{81}+10\cdot 36^{81}):99$.

216. Представьте в виде многочлена:

а) $(a-b)(a^2+b^2)+2(a-b)(a^2+ab+b^2)-3a(a^2-b^2)$;

б) $b(3a^2-13b)+(a-b)(3a^2-6b^2)+2(a+b)(ab-a^2)$;

в) $(a^2x-ax^3)(ax^3+a^2x)$;

г) $(16m^2+4my^2+y^4)(4m-y^2)$;

д) $(y-5k)(y^2+5ky+25k^2)(125k^3+y^3)$;

е) $(m^2+2m+1)(m^2-2m+1)(m^4-2m^2+1)$;

ж) $(x^{2n}+x^ny^n+y^{2n})(x^n-y^n)(y^{3n}+x^{3n})$.

217. Представьте в виде квадрата или куба многочлена:

а) $4x^2+9y^2+25z^2+12xy-30yz-20xz$;

б) $\frac{x^4}{4}+16y^2+\frac{4y^4}{9}-4x^2y+\frac{2x^2y^2}{3}-\frac{16y^3}{3}$;

в) $x^{12}-3x^8y^2+3x^4y^4-y^6$;

г) $64x^{15}-144x^{10}y^3+108x^5y^6-27y^9$;

д) $x^3-y^3-3x^2y+3xy^2+12xy-6x^2-6y^2+12x-12y-8$.

218. Докажите тождества:

а) $(b-1)(b-2)(1+b+b^2)(4+2b+b^2)=b^6-9b^3+8$;

---

*) Знак : читается «делится на».

б) $(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2=x^5+(1+x+x^2+x^3+x^4)\times$
$\times(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$.

Обобщите эти тождества.

219. Докажите, что:

а) $(313\cdot 299-313^2):7$;
в) $(11^{100}-1):100$;
б) $(2^{55}+1):33$;
г) $(4719^3-2734^3):1985$.

220. Докажите, что при любом натуральном значении n имеем:

а) $(2n^3+3n^2+7n):6$;
в) $(25n^4-2n^3-n^2+2n):24$;
б) $(n^4+2n^3+3n^2+2n):8$;
г) $((7n+3)^2-(3-n)^2):96$.

221. Разложите на множители выражение:

а) $(b^2-by)^4-(b^2+by)^4-2b^2$;
в) $a^3+b^3+a^2-b^2$;
б) $(a-b)^3-(c+d)^3-a+b+c+d$;
г) $x^3-8+(x+2)^2-2x$.

222. Найдите такие a и b, что:

а) $2x^3-8x^2+9x-9=(x-3)(2x^2+ax+b)$;
б) $2x^4+5x^3+3x^2-2x-8=(x^2+x-2)(2x^2+ax+b)$;
в) $x^5-5x^3+4x^2-3x-2=(x-2)(x^4+ax^3+bx^2+2x+1)$.

223. Сократите дробь:

а) $\dfrac{6x^2+7x-3}{2x^2-x-6}$;
г) $\dfrac{x^4-16}{x^4-4x^3+8x^2-16x+16}$;
б) $\dfrac{4x^3-8x^2+3x-6}{12x^3+4x^2+9x+3}$;
д) $\dfrac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}$;
в) $\dfrac{x^3-1}{x^4+x^2+1}$;
е) $\dfrac{(x+2)^7-x^7-128}{(x+2)^5-x^5-32}$.

224. Докажите тождество:

а) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc=(b+c)(c+a)(a+b)$;
б) $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=(b+c)(c+a)(a+b)$;
в) $(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)+(x+yz)(y+zx)(z+xy)=$
$=(1+xyz)(x^2+y^2+z^2+2xyz-1)$;
г) $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)=2(a^3+b^3+c^3-3abc)$;
д) $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3+(a+d)^3+(b+d)^3+(c+d)^3=$
$=3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)$;
е) $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)=(a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b))\times$
$\times(a+b)(b+c)(c+a)$.

225. Представьте в виде многочлена:

а) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$;
б) $(a^2+b^2+c^2+bc+ac+ab)^2-(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)$;

в) $(abc+bcd+cda+dab)^2-(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)$;

г) $(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd)$.

226*. Докажите, что если $a+b+c=s$, то

$$(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.$$

227. Докажите, что если $a+b+c=0$, то

а) $a(a+b)(a+c)=b(b+a)(b+c)=c(c+b)(c+a)=abc$;

б) $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)=0$;

в) $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)=0$;

г) $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=2(ab+bc+ca)^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$.

228. Представьте частное в виде многочлена:

а) $\dfrac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$; б) $\dfrac{x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$.

229. Разложите на множители выражение:

а) $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$;

б) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$;

в) $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$;

г) $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$;

д) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$;

е) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

230. Разложите на множители первой и второй степени:

а) $(1+a^2-b^2-2a)^2-(4b-4ab)(1+a^2-b^2-2a)$;

б) $xyz(x^3+y^3+z^3)-y^3z^3-z^3x^3-x^3y^3$;

в) $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$;

г) $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$;

д) $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$;

е) $(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$;

ж) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$;

з) $(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$.

231*. Докажите, что если $x=u^2-w$, $y=-u^2+v$, $z=uw-1$, $t=-uv+1$, где $u=a^2+3b^2$, $v=a+3b$, $w=a-3b$, то $x^3+y^3=z^3+t^3$.

232. Не выполняя вычислений, определите, является ли дробь правильной или неправильной:

а) $\dfrac{(327+154)^2}{327^2+154^2}$; б) $\dfrac{24^3+37^3}{61(24^2+37^2)}$; в) $\dfrac{85^2+16^2}{(85+16)^2}$; г) $\dfrac{124^3-115^3}{9(124^2+115^2)}$.

233. Вычислите $P(198)$, если $P(x)=x^2+4x+4$.

234. Вычислите $P(305)$, если $P(x)=x^2-10x+25$.

235. Упростите выражение:

а) $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$;

б) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$.

236. Решите уравнение:

а) $(x-1)^2+(1-x)^2=2x^2-8x+9$;

б) $(2x-1)^2+2(2x-1)(3-2x)+(2x-3)^2=4x$;

в) $(y-5)^2+2(5-y)(y+4)+(4+y)^2=-9y$;

г) $(x+1)^2-4(1+x)(x-2)+4(2-x)^2=(6-x)^2$;

д) $(y-1)^3+(1-y)^3=2y+5$;

е) $(x-1)^3+(2-x)^3=3x^2-10x$;

ж) $(2x-1)^3-(2x-3)^3=24x^2-40x-24$.

237. Решите уравнение:

а) $x^2+y^2-2y+1=0$;

б) $|x|+y^2+z^2-2y+4z+5=0$;

в) $4x^2-10xy+25y^2=10xy-|y-2|$.

238. Представьте в виде многочлена:

а) $(a+2b^2-3c^4)^2$;

б) $(a-3a^2x-4xb^2)^2$;

в) $(-a+3b^2-2c^4-d^3)^3$.

239. Докажите, что если $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$, то $ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$.

240. Докажите тождество:

а) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+$
$+(az-cx)^2$;

б) $(a+b+c)(ab+bc+ac)=abc+(a+b)(a+c)(b+c)$;

в) $ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a-b+c)=(a-b)(b-c)(c+a)$.

241. Разложите на множители многочлен

$$2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

242. Пусть $a^2+b^2=k$ и $ab=m$. Выразите через k и m выражение $a^4+a^2b^2+b^4$.

243. Найдите значение $a^6+3a^2b^2+b^6$, если $a^2+b^2=1$.

244. Докажите тождество:

а) $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2)$;

б) $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3-2(a^3+b^3+c^3-3abc)=3(a+b)(b+c)(a+c)$;

в) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(a+c)(b+c)$;

г) $(a+b+c)^3+3abc=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)$;

д) $a^3+b^3+c^3+6abc-\frac{1}{4}(a+b+c)^3=$
$=\frac{3}{4}((a+b-c)^2c+(a-b+c)^2b+(-a+b+c)^2a)$.

245*. Докажите, что:

а) $(a-b)(1+ac)(1+bc)+(b-c)(1+ab)(1+ac)+(c-a)(1+bc)(1+ab)+$
$+(a-b)(b-c)(a-c)=0$;

б) $ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)+(a-b)(b-c)(c-a)=0$;

в) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(a-b)(b-c)(a-c)$;

г) $a^2b^2(b-a)+b^2c^2(c-b)+a^2c^2(a-c)=(b-a)(b-c)(a-c)(ab+bc+ac)$;

д) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$;

е) $ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ac(c^2-a^2)=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$;

ж) $a^3(b+c)-b^3(c+a)-c^3(a-b)=(a-b)(b+c)(c+a)(a+b-c)$;

з) $(a-b)(a+b)^2+(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2=-(a-b)(b-c)(c-a)$;

и) $(a-b)(a+b)^3+(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3=-2(a-b)(b-c)(c-a)\times$
$\times(a+b+c)$;

к) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)=-0{,}5(a-b)(b-c)(c-a)\times$
$\times((a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2)$.

246*. Докажите, что:

а) если $a=b+1$, то $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\ldots(a^{64}+b^{64})=a^{128}-b^{128}$;

б) если $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$, то $a=b=c$;

в) если $a^4+b^4+c^4=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$, то $|a|=|b|=|c|$;

г) если $a^2+b^2+c^2+d^2=x^2+y^2+z^2+t^2=ax+by+cz+dt=1$, то $a=x$, $b=y$, $c=z$, $d=t$.

247. Докажите, что если $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=k$, то $a^4+b^4+c^4=\dfrac{k^2}{2}$.

248. Докажите, что:

а) если $a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=1$, то $abc=0$;

б) $(a+b+c)^3-(-a+b+c)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3=24abc$;

в) $(a^2-bc)^3+(b^2-ac)^3+(c^2-ab)^3-3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)=$
$=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$.

249. Докажите, что из равенства $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+$
$+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$ следует $x=y=z$.

250*. Докажите тождество:

а) $(6a^2-4ab+4b^2)^3=(3a^2+5ab-5b^2)^3+(4a^2-4ab+6b^2)^3+(5a^2-5ab-3b^2)^3$;

б) $(p^2-q^2)^4+(2pq+q^2)^4+(2pq+p^2)^4=2(p^2+pq+q^2)^4$;

в) $X^2+XY+Y^2=Z^3$, где $X=q^3+3pq^2-p^3$, $Y=-3pq(p+q)$, $Z=p^2+pq+q^2$;

г) $(3a+3b)^k+(2a+4b)^k+a^k+b^k=(3a+4b)^k+(a+3b)^k+(2a+b)^k$,
$k=1,\ 2,\ 3$;

д) $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+(a+d-b-c)^2=$
$=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$;

е) $(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+2(ab-bc+dc+ad)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-$
$-2(ab-ad+bc+dc)^2$;

ж) $(a^2-c^2+2bd)^2+(d^2-b^2+2ac)^2=(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+2(ab-bc+cd+ad)^2$;
з) $(a+b+c)^4+(b+c-a)^4+(c+a-b)^4+(a+b-c)^4=4(a^4+b^4+c^4)+$
$+24(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$.

251. Пусть $a+b+c=2p$. Докажите, что:

а) $p(p-b)(p-c)+p(p-c)(p-a)+p(p-a)(p-b)=(p-a)(p-b)(p-c)+abc$;
б) $a(p-a)^2+b(p-b)^2+c(p-c)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)=abc$.

252. Положим $a+b+c=2s$, $a^2+b^2+c^2=2\sigma^2$. Докажите, что

$$(\sigma^2-a^2)(\sigma^2-b^2)+(\sigma^2-b^2)(\sigma^2-c^2)+(\sigma^2-c^2)(\sigma^2-a^2)=4s(s-a)(s-b)(s-c).$$

253. Разложите на множители выражение:

а) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$; б) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

254. Упростите выражение $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$.

255. Пусть $a+b+c=0$. Докажите, что:

а) $2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$;
б) $5(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)=6(a^5+b^5+c^5)$;
в) $10(a^7+b^7+c^7)=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)$.

256. Докажите, что куб многочлена равен сумме кубов его членов, сложенной с утроенной суммой произведений квадратов одного члена на другой и с ушестеренной суммой произведений его членов по три.

257. С помощью результата предыдущей задачи представьте в виде многочлена следующее выражение:

а) $(x^2+y^2+z^2+t^2)^3$; в) $(1+x+x^2+x^3)^3$;
б) $(x^2+y^2-z^2-t^2)^3$; г) $(1-x+x^2-x^3)^3$.

258. Представьте в виде многочлена:

а) $(1+x+x^2+x^3)^3(1-x)^3$; б) $(1-x+x^2-x^3)^3(1+x)^3$.

259. Докажите, что если $B=b^2+bc+c^2$, $C=b^2c+bc^2$, то $AB^3-27C^2=$
$=(b-c)^2(2b^2+5bc+2c^2)^2$.

260. Разложите на множители:

а) $x^3+x^2z+xyz+y^2z-y^3$;
б) $xyz(x^3+y^3+z^3)-y^3z^3-z^3x^3-x^3y^3$;
в) $x(y^2+yz+z^2)+y(x^2+xz+z^2)+z(x^2+xy+y^2)$;
г) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$.

261. Докажите, что нечетное число, являющееся точным квадратом, дает при делении на 8 в остатке 1.

Глава III

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

В 70-х гг. XIX в. немецкий математик Георг Кантор (1845—1918) создал новую область математики — теорию бесконечных множеств. Через несколько десятилетий почти вся математика была перестроена на теоретико-множественной основе.

Познакомимся с некоторыми разделами этой теории.

1. МНОЖЕСТВА И ИХ ЭЛЕМЕНТЫ

В повседневной жизни обычно различные совокупности предметов называют одним словом. Совокупность документов называют архивом, собрание музыкантов — оркестром, группу лошадей — табуном, родителей, детей и их родственников — семьей, большую группу людей — толпой или очередью, собрание книг — библиотекой и т. д.

Математическим понятием, отражающим объединение некоторых объектов, предметов или понятий в единую совокупность, является понятие множества. Это понятие в математике является первичным, неопределяемым, таким же, как понятие точки и прямой в геометрии,— к более простым понятиям оно не сводится.

Приведем примеры множеств.

1. Множество всех людей, живущих в настоящее время на Земле.
2. Множество всех рыб в Тихом океане.
3. Множество звезд в Галактике.
4. Множество N всех натуральных чисел.

5. Множество всех рациональных чисел x, удовлетворяющих условию $2 \leqslant x \leqslant 10$.
6. Множество M всех точек плоскости, находящихся на равном расстоянии от фиксированной точки O.
7. Множество пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условию $3x + 2y \leqslant 0$.
8. Множество учащихся данной школы.
9. Множество императоров Российской империи.

Приведенные примеры поясняют следующие слова создателя теории множеств Г. Кантора: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое».

Предметы, объекты, образующие данное множество, называются его *элементами*. Например, Александр I является элементом множества российских императоров, а число 9 — элементом множества натуральных чисел. В то же время Иван IV не является элементом множества российских императоров*), а число $\frac{3}{4}$ не является элементом множества натуральных чисел.

Обычно множества обозначаются латинскими прописными буквами A, B, C, D, X, Y, Z, W и т. д., а их элементы — строчными буквами a, b, c, d, x, y, z, w и т. д. Множество, состоящее из элементов a, b, c, обозначают $\{a; b; c\}$. При этом ни один элемент не включается дважды. Например, $\{a; b; b; c\}$ множеством не является, так как элемент b повторен дважды. То обстоятельство, что объект a является элементом множества A, записывают так: $a \in A$ (читают: a принадлежит множеству A). Если объект a не является элементом множества A, то пишут: $a \notin A$ (читают: a не принадлежит множеству A).

Например, если A есть множество всех нечетных натуральных чисел, B — множество всех российских писателей, то $3 \in A$, $6 \notin A$, Н. В. Гоголь $\notin A$, Н. В. Гоголь $\in B$, $3 \notin B$, Марк Твен $\notin B$ и т. д.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Назовите известные вам названия множеств военнослужащих.
2. Назовите известные вам названия множеств живых существ (например, стая).
3. Назовите известные вам названия множеств людей (например, бригада).
4. Как называется множество царей (фараонов, императоров) данной страны, принадлежащих одному семейству? Приведите примеры.
5. Пусть A — множество всех существ, умеющих летать, B — множество всех насекомых, C — множество всех птиц.

   а) Назовите два элемента множества B, не являющиеся элементами множества A.

*) Российское государство получило название «империя» в 1721 г. Первым российским императором был Петр I.

б) Назовите два элемента множества C, не являющиеся элементами множества A.
в) Существуют ли элементы, принадлежащие всем множествам?

6. Как называются линии на географических картах, изображающие множество точек земной поверхности, имеющих:
а) одинаковую долготу;
б) одинаковую широту;
в) одинаковую среднюю годовую температуру;
г) одинаковое давление в данный момент времени;
д) одинаковую высоту над уровнем моря?

7. Назовите три элемента, принадлежащие множеству:
а) чисел, кратных 3 и не делящихся на 5;
б) полных десятков;
в) квадратов натуральных чисел.

8. Как называется множество артистов, работающих в одном театре?

9. Какие названия применяют для обозначения множеств кораблей?

10. Как называется множество цветов, стоящих в вазе?

11. Как называется множество точек земной поверхности, равноудаленных от обоих полюсов?

1) меридиан; 3) экватор;
2) параллель; 4) геодезическая линия.

12. Пусть A — множество делителей числа 60. Верна ли запись:

а) $7 \in A$; б) $10 \in A$; в) $20 \notin A$?

Составьте список элементов множества A.

13. Пусть A — множество корней уравнения $x^2 - 7x + 12 = 0$. Верна ли запись:

а) $3 \in A$; б) $-5 \in A$; в) $10 \notin A$; г) $4 \notin A$?

Составьте список элементов множества A.

14. Пусть A — множество всех многочленов от одной переменной x, все коэффициенты которых целые. Верна ли запись:

а) $x - 15x + 6 \in A$; в) $\frac{3}{4}x^3 - 1 \notin A$;

б) $x^2 + y^2 - 1 \in A$; г) $\frac{7}{6}x - 5 \in A$?

15. Пусть M — множество всех треугольников. Перечислите геометрические фигуры на рисунке 8, принадлежащие этому множеству. Из скольких элементов состоит множество треугольников на рисунке 8?

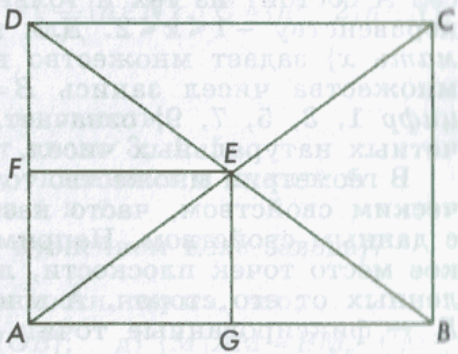


Рис. 8

Различают множества конечные и бесконечные. *Конечным* называется множество, состоящее из конечного числа элементов. Среди конечных множеств выделяют множество, не имеющее ни одного элемента. Его называют *пустым* множеством и обозначают символом $\varnothing$. Примерами пустых множеств являются множество людей выше трех метров роста, множество нечетных чисел, делящихся на два, и т. д. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным* множеством.

Имеется два существенно различных способа задания множества. Первый способ состоит в том, что множество задается указанием всех его элементов. В этом случае говорят, что множество задано перечислением всех своих элементов, или списком элементов. Например, перечислением всех своих элементов задается множество континентов (Австралия, Антарктида, Африка, Евразия, Северная Америка, Южная Америка), множество учеников класса (списком в классном журнале), множество слов, использованных А. С. Пушкиным в его произведениях (списком в «Словаре пушкинского языка»).

Ясно, что перечислением элементов можно задать лишь конечные множества. И даже для них это не всегда легко сделать: попробуйте перечислить все элементы конечного множества, состоящего из всех людей, живущих на Земле!

Второй способ задания множества применим как к конечным, так и к бесконечным множествам. Он состоит в том, что указывается свойство, которым обладают все элементы рассматриваемого множества и не обладают никакие другие объекты. Такое свойство называется **характеристическим свойством** множества. Если множество A задано характеристическим свойством P, то пишут:

$$A=\{x\,|\,P(x)\}.$$

Эту запись читают так: множество A состоит из тех и только тех элементов, которые обладают свойством P. Например, для множества чисел запись $A=\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 2\}$ означает, что множество чисел A состоит из тех и только тех чисел x, которые удовлетворяют неравенству $-1\leqslant x\leqslant 2$. Для множества людей запись $A=\{x\,|\,a$ *есть мать* $x\}$ задает множество всех детей женщины с именем a. Для множества чисел запись $B=\{n\,|\,n\in N$, n *заканчивается одной из цифр* 1, 3, 5, 7, 9$\}$ означает, что множество B состоит из всех нечетных натуральных чисел.

В геометрии множество точек, обладающих данным характеристическим свойством, часто называют *геометрическим местом точек* с данным свойством. Например, биссектриса угла есть геометрическое место точек плоскости, лежащих внутри этого угла и равноудаленных от его сторон. А множество $B=\{M\,|\,F_1M+F_2M=10\}$, где F_1, F_2 — фиксированные точки плоскости, есть геометрическое место точек M плоскости, таких, что сумма расстояний F_1M и F_2M равна 10.

Пример.

Выясним, принадлежат ли числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ множеству

$$A=\left\{\frac{n}{n+16}\,|\,n\in N\right\}.$$

Решение. Множество A состоит из всех чисел, которые можно представить дробью вида $\frac{n}{n+16}$, где n — любое натуральное число. Чтобы проверить, содержит ли множество A число $\frac{1}{2}$, решим уравнение $\frac{n}{n+16}=\frac{1}{2}$. Имеем $2n=n+16$, $n=16$.

Так как $16\in N$ и $\frac{1}{2}=\frac{16}{16+16}$, получаем, что $\frac{1}{2}\in A$.

Далее, решая уравнение $\frac{n}{n+16}=\frac{1}{4}$, получаем $4n=n+16$, или $n=\frac{16}{3}$. Так как $n=\frac{16}{3}\notin N$, то и $\frac{1}{4}\notin A$.

УПРАЖНЕНИЯ

16. Приведите по три примера конечных и бесконечных множеств.

17. Задайте перечислением элементов множество, заданное характеристическим свойством:

а) $A=\{x\,|\,x^2-8x+15=0\}$;

б) $A=\{x\,|-11<x\leqslant -3,\ x\in N\}$;

в) $A=\{x\,|\,x^4-10x^2+9=0\}$;

г) $A=\left\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 7\frac{1}{3},\ x\in N\right\}$.

18. Даны множества $A=\{n^2+1\,|\,n\in N\}$, $B=\left\{\frac{1}{n}\,|\,n\in N\right\}$, $C=\{n^3-2\,|\,n\in N\}$, $D=\{n^4+3\,|\,n\in N\}$.

Укажите:
а) по три элемента каждого из этих множеств;
б) множества, которым принадлежит число 3; 4; 5;
в) множества, не содержащие чисел, указанных в пункте *б*.
Ответ запишите с помощью символов $\in$ и $\notin$.

19. Что означает запись $\{x\,|\,x$ работает в кузнечном цехе завода$\}$?

20. Опишите множество точек M на плоскости, таких, что:

а) $\{M\,|\,OM=R\}$; в) $\{M\,|\,\angle AOM=\angle MOB\}$; д) $\{M\,|\,AM=BM=CM\}$,

б) $\{M\,|\,OM\leqslant R\}$; г) $\{M\,|\,AM=BM\}$;

где O, A, B, C — фиксированные точки плоскости.

21. Задайте характеристическим свойством множество всех:

а) параллелограммов; в) квадратов;
б) прямоугольников; г) равнобедренных треугольников.

22. В данном множестве все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Опишите это свойство и найдите элемент, не обладающий им:

а) {треугольник; квадрат; трапеция; круг; правильный шестиугольник};
б) {лев; лисица; гиена; слон; рысь};
в) {бежать; смотреть; синий; знать; писать};
г) {2; 6; 15; 84; 156};
д) {Москва; Санкт-Петербург; Одесса; Гомель; Лондон};
е) {2; 7; 13; 16; 29};
ж) {1; 9; 67; 81; 121}.

23. Исследуйте, принадлежат ли числа $\frac{2}{5}$, $\frac{17}{20}$, $-\frac{1}{7}$, $\frac{5}{6}$ множеству $A=\left\{\frac{n+1}{n+4}\,|\,n\in N\right\}$.

24. Напишите три числа, принадлежащие множеству:

а) $A=\left\{\frac{n^3+7}{n^3+15}\,|\,n\in N\right\}$; б) $A=\left\{\frac{n^4-1}{n^2+2}\,|\,n\in N\right\}$.

25. Угадайте, по какому закону составлено бесконечное множество*):

а) $\left\{\frac{3}{4}; \frac{4}{9}; \frac{5}{16}; \frac{6}{25}; \ldots\right\}$; в) $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30}; \frac{1}{42}; \ldots\right\}$;

б) $\left\{\frac{2}{5}; \frac{4}{8}; \frac{6}{11}; \frac{8}{14}; \ldots\right\}$; г) $\{2; 12; 36; 80; 150; \ldots\}$.

26. Докажите, что указанное множество не содержит целых чисел:

а) $A=\left\{\frac{n}{n+1}\,|\,n\in N\right\}$; б) $A=\left\{\frac{2n^2+1}{n^2+1}\,|\,n\in N\right\}$; в) $A=\left\{\frac{3n^3+4}{n^3+2}\,|\,n\in N\right\}$.

27. Укажите среди следующих множеств пустое:

а) множество параллелограммов с неравными смежными сторонами;
б) множество вписанных четырехугольников с неравными диагоналями;
в) множество целых корней уравнения $(x-1)^3-1=0$;
г) множество корней уравнения $x^4+2x^2+1=0$;
д) множество горных вершин высотой более 8000 м;

---

*) То есть укажите одно из характеристических свойств, которому удовлетворяют указанные элементы данного множества.

е) множество равносторонних треугольников, для которых выпол
няется равенство $a^2+b^2=c^2$, где a, b, c — длины сторон;
ж) множество положительных корней уравнения x^3+6x^2+11x
$+6=0$;
з) множество точек с натуральными координатами, лежащих н
прямой $y=2x$.

28. Укажите несколько элементов множества $A=\{x|x$ — слово русског
языка, первыми двумя буквами которого являются буквы c и $o\}$.

29. Пусть $A=\{x|x^3+4x^2+x-6=0\}$. Справедливо ли утверждение:

а) $2\in A$; б) $3\in A$; в) $1\in A$?

Задайте множество A перечислением его элементов.

30. Пусть $A=\{x|4x^3+8x^2+5x+1=0\}$. Выберите три значения x и пр
верьте, принадлежат ли они множеству A. Задайте множество
перечислением его элементов.

31. Пусть $A=\{h|h$ — такое число, что прямая $y=x+h$ имеет общи
точки с параболой $y=x^2\}$. Какие утверждения справедливы:

а) $-1\notin A$; б) $0\in A$; в) $1\in A$?

32. Пятеро друзей — Иван, Андрей, Виктор, Елена и Мария решил
сфотографироваться. Они хотят стать в ряд таким образом, чтоб
юноши и девушки чередовались. Перечислите все возможности.

3. ПОДМНОЖЕСТВА

Если множество A не является пустым множеством, то из не
можно образовать другие множества, являющиеся его частями. Та
множество птиц является частью множества позвоночных, друго
частью этого множества является множество рыб, млекопитающи
образуют еще одну часть этого множества. Множество четных чисе
множество чисел, кратных трем, множество нечетных чисел — в
это различные части множества натуральных чисел.

В математике вместо слова «часть» используют слово «подмн
жество» и говорят, что множество B является подмножеством мн
жества A, если каждый элемент x из множества B является вмес
с тем и элементом множества A. В этом случае пишут: $B\subset A$. Зде
знак $\subset$ является знаком *включения* одного множества в другое.

Примерами подмножеств могут служить множества, задаваем
характеристическими свойствами в предыдущем пункте.

Пример.

Рассмотрим множества:
B — множество всех четырехугольников,
C — множество всех параллелограммов,
D — множество всех прямоугольников,
E — множество всех квадратов.
Какие из этих множеств являются подмножествами других?

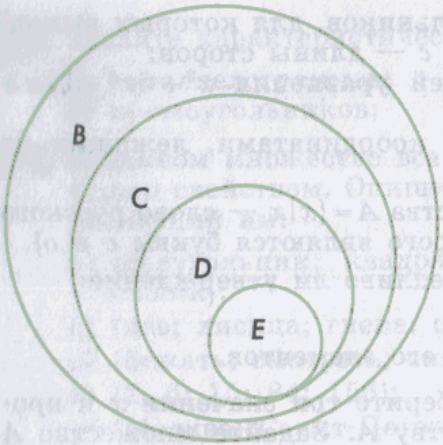


Рис. 9

Решение. В смысле множеств фигура каждого следующего типа является частным случаем фигуры предыдущего типа (параллелограмм — частный случай четырехугольника, прямоугольник — параллелограмма, квадрат — прямоугольника). Это означает, что каждое следующее множество является подмножеством предыдущего. Поэтому

$$E \subset D \subset C \subset B.$$

Для иллюстрации соотношения между множествами пользуются схемами, называемыми диаграммами Эйлера — Венна*), на которых множества изображаются овалами, в частности кругами. На рисунке 9 с помощью кругов показано соотношение между множествами B, C, D, E.

Возможна ситуация, когда для множеств A и B соотношения $A \subset B$ и $B \subset A$ выполняются одновременно. Но запись $A \subset B$ означает, что все элементы множества A являются и элементами множества B, а запись $B \subset A$ говорит о том, что все элементы множества B являются элементами множества A. Значит, эти множества состоят из одних и тех же элементов. В этом случае говорят, что множества A и B равны.

Если множество B является подмножеством множества $A (B \subset A)$, то принадлежность элемента x множеству B является достаточным условием его принадлежности множеству A, а принадлежность элемента x множеству A — необходимым условием его принадлежности множеству B. Например, если A — множество четных натуральных чисел, B — множество натуральных чисел, кратных 10, то очевидно, что $B \subset A$. Поэтому, для того чтобы натуральное число n было четным числом, т. е. $n \in A$, достаточно, чтобы n делилось на 10, т. е. $n \in B$. С другой стороны, для того чтобы n делилось на 10, т. е. $n \in B$, необходимо, чтобы это число было четным, т. е. $n \in A$.

Если множества A и B равны, то принадлежность элемента множеству A необходима и достаточна для его принадлежности множеству B. Другими словами, теоремы о том, что некоторое условие является необходимым и достаточным,— это теоремы о равенстве двух множеств.

Например, множество A всех ромбов совпадает с множеством B всех параллелограммов, имеющих взаимно перпендикулярные диагонали. Поэтому, для того чтобы параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.

*) Леонард Эйлер (1707—1783) — один из величайших математиков XVIII в., швейцарец; Дж. Венн (1834—1923) — английский математик.

УПРАЖНЕНИЯ

33. Каким свойством выделяется подмножество квадратов в множестве ромбов?

34. Каким свойством выделяется подмножество млекопитающих в множестве всех живых существ?

35. Назовите 5 подмножеств в множестве слов русского языка.

36. Даны множества. Расположите их так, чтобы каждое предыдущее множество было подмножеством следующего.

а) A — множество всех четырехугольников, B — множество всех ромбов, C — множество всех параллелограммов, D — множество всех многоугольников;

б) Q — множество всех рациональных чисел, Z — множество всех целых чисел, N — множество всех натуральных чисел, A — множество всех четных натуральных чисел, B — множество всех натуральных чисел, делящихся на 12;

в) A — множество всех учеников 8 класса данной средней школы, B — множество всех учеников данной средней школы, C — множество всех учеников 8 класса этой же школы, посещающих факультативные занятия по математике, D — множество всех учащихся средних школ России, E — множество всех учащихся средних школ в городе, где находится данная школа, F — множество всех юношей 8 класса данной средней школы, посещающих факультативные занятия по математике;

г) A — множество всех позвоночных животных, B — множество всех животных, C — множество всех млекопитающих животных, D — множество всех волков, E — множество всех хищных млекопитающих, F — множество всех волков, обитающих на Среднерусской возвышенности.

37. Опишите множества A и B и вместо многоточия поставьте один из терминов:

необходимо,

достаточно,

необходимо и достаточно.

Какое из трех соотношений: $A \subset B$, $B \subset A$, $A = B$ — справедливо?

а) Для того чтобы четырехугольник был ромбом, ..., чтобы он был квадратом.

б) Для того чтобы число делилось на 9, ..., чтобы оно делилось на 3.

в) Для того чтобы число делилось на 10, ..., чтобы его десятичная запись оканчивалась нулем.

г) Для того чтобы произведение двух множителей равнялось нулю, ..., чтобы по крайней мере один из них равнялся нулю.

д) Для того чтобы число делилось на 5, ..., чтобы оно делилось на 25.

4. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ И ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Если даны два множества, то можно образовать новое множество, составленное из общих элементов этих множеств. Например, общей частью множеств $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ и $B=\{3;\ 5;\ 7;\ 9\}$ будет множество $\{3;\ 5\}$, которое называют *пересечением* множеств A и B.

Определение. *Пересечением* множеств A и B называется новое множество, содержащее те и только те элементы, которые входят одновременно и в множество A, и в множество B.

Пересечение множеств A и B обозначают $A\cap B$ ($\cap$ — знак пересечения):

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ и } x\in B\}.$$

Например, если A — множество всех прямоугольников, B — множество всех ромбов, то $A\cap B$ — множество всех квадратов. Если A — множество участников олимпиады, а B — множество призеров, то $A\cap B$ — множество участников олимпиады, получивших медали.

Геометрическую иллюстрацию операции пересечения множеств A и B дают диаграммы Эйлера—Венна (рис. 10). На рисунке 10, *а* заштриховано множество $A\cap B$, на рисунке 10, *б* множества A и B не пересекаются, т. е. $A\cap B=\varnothing$.

Операция пересечения множеств применяется там, где требуется найти элементы, удовлетворяющие сразу двум условиям. Например, множество натуральных чисел, кратных 15,— это пересечение множества натуральных чисел, кратных 3, и множества натуральных чисел, кратных 5, т. е.

$$\{x\,|\,x\in N,\ x\vdots 15\}=\{x\,|\,x\in N,\ x\vdots 3\}\cap\{x\,|\,x\in N,\ x\vdots 5\}.$$

Множество решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y есть пересечение множества A_1 пар чисел $(x;\ y)$, являющихся решениями первого уравнения, и множества A_2 пар чисел $(x;\ y)$, являющихся решениями второго уравнения.

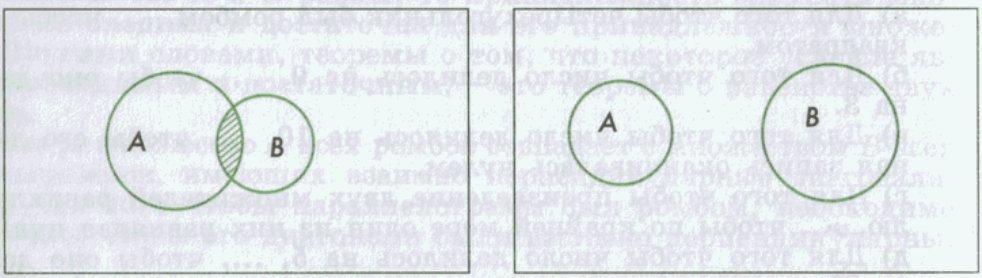


Рис. 10 а) б)

Пример 1.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 3x-2y=2. \end{cases}$$

Решение. На координатной плоскости графиком уравнения $x+y=1$ является прямая l_1, а графиком уравнения $3x-2y=2$ — прямая l_2 (рис. 11). Множество решений первого уравнения:

$$A_1=\{(x;\ y)\,|\,x+y=1\},$$

множество решений второго уравнения:

$$A_2=\{(x;\ y)\,|\,3x-2y=2\}.$$

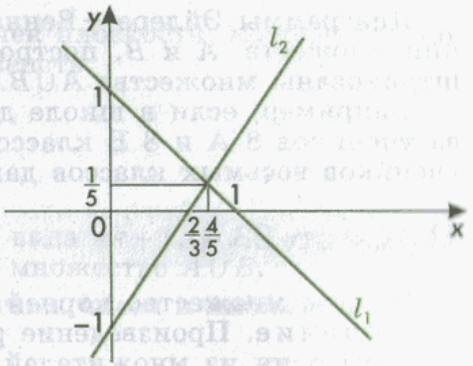


Рис. 11

Пересечением этих множеств является пара чисел $\left(\frac{4}{5};\ \frac{1}{5}\right)$, значит, множество решений данной системы есть множество

$$\left\{\left(\frac{4}{5};\ \frac{1}{5}\right)\right\}=\{(x;\ y)\,|\,x+y=1\}\cap\{(x;\ y)\,|\,3x-2y=2\}.$$

Из двух множеств A и B можно образовать новое множество, объединяя все элементы множества A и все элементы множества B. Например, объединяя элементы множества $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ с элементами множества $B=\{3;\ 5;\ 7\}$, получим новое множество $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7\}$, которое называют *объединением* множеств A и B. При этом общие элементы 3 и 5 входят в объединение один раз.

Определение. *Объединением* множеств A и B называется новое множество $A\cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят хотя бы в одно из множеств A или B ($\cup$ — знак объединения):

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ или } x\in B\}.$$

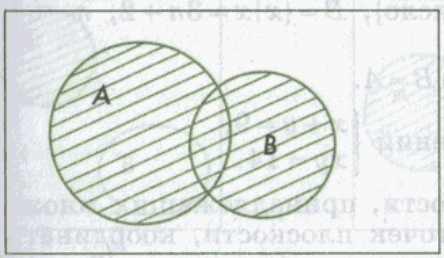


Рис. 12

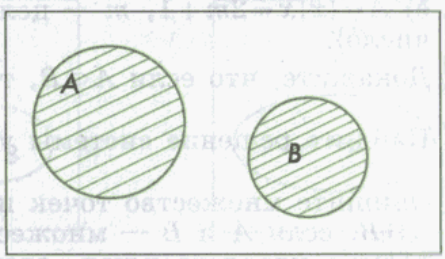


Рис. 13

Диаграммы Эйлера — Венна, соответствующие операции объединения множеств A и B, построены на рисунках 12 и 13. На них заштрихованы множества $A \cup B$.

Например, если в школе два восьмых класса, A и B — множества учеников 8 А и 8 Б классов соответственно, то $A \cup B$ — множество учеников восьмых классов данной школы.

Пример 2.

Найдем множество корней уравнения $(x^2-4)(x^2-9)=0$.

Решение. Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому надо сначала решить уравнения $x^2-4=0$ и $x^2-9=0$, а потом объединить множества корней первого и второго уравнений. Множество корней первого уравнения $x^2-4=0$, или $(x-2)(x+2)=0$, есть множество $\{-2;\ 2\}$, а множество корней уравнения $x^2-9=0$, или $(x-3)(x+3)=0$, есть $\{-3;\ 3\}$. Решением исходного уравнения будет объединение

$$\{-2;\ 2\} \cup \{-3;\ 3\} = \{-2;\ 2;\ -3;\ 3\}.$$

Операции пересечения и объединения могут быть определены не только для двух, но и для трех и любого числа множеств. При этом смысл операций остается прежним.

УПРАЖНЕНИЯ

38. Пусть A — множество всех правильных многоугольников, B — множество всех треугольников. Опишите множество $A \cap B$.

39. Найдите множество $A \cap B$, если:

а) $A=\{x \mid x \in \boldsymbol{Q},\ 0 \leqslant x \leqslant 4\}$, $B=\{x \mid x \in \boldsymbol{Q},\ 1 \leqslant x \leqslant 5\}$,

б) $A=\{x \mid x \in \boldsymbol{Q},\ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$, $B=\{x \mid x \in \boldsymbol{Q},\ 3 \leqslant x \leqslant 7\}$.

в) A — множество четных натуральных чисел, B — множество целых чисел, делящихся на 3;

г) A — множество натуральных чисел, делящихся на 4, B — множество натуральных чисел, делящихся на 6;

д) A — множество корней уравнения $x^2-4x+3=0$, B — множество корней уравнения $x^2-3x+2=0$;

е) $A=\{x \mid x=2m+1,\ m$ — целое число$\}$, $B=\{x \mid x=3n+2,\ n$ — целое число$\}$.

40. Докажите, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$.

41. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} x+y=9, \\ xy=14. \end{cases}$

42. Опишите множество точек плоскости, принадлежащих множеству $A \cap B$, если A и B — множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют соответственно неравенствам $xy>1$ и $x+y>2$. Сделайте чертеж.

43. Опишите и постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} y \geqslant \frac{1}{2}x^2, \\ y \geqslant \frac{3}{2}x - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y > \frac{1}{x}, \\ y > x^2. \end{cases}$

44. Пусть A — множество целых чисел вида $4k+1$, а B — множество чисел вида $4k+3$. Охарактеризуйте множество $A \cup B$.

45. Найдите объединение множества четных чисел и множества нечетных чисел.

46. Найдите множество корней уравнения, разложив предварительно левую часть на множители:

а) $x^3 - 3x - 2 = 0$; в) $(x-1)^3 + (2x+3)^3 - 27x^3 - 8 = 0$;

б) $2x^3 - x^2 - 1 = 0$; г) $6x^4 - 13x^3 - 27x^2 + 40x - 12 = 0$.

47. Найдите решение системы уравнений:

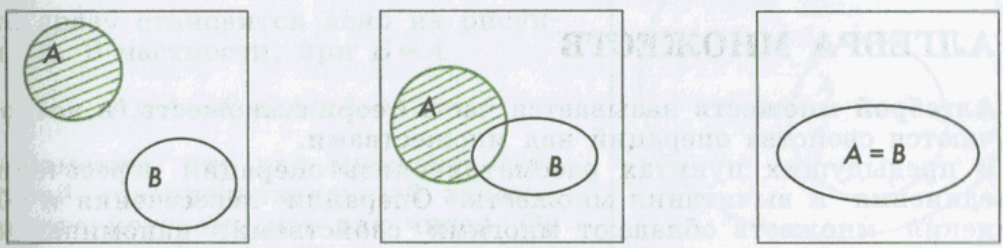
а) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, \\ x + 4y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0, \\ x^2 + 6xy + 8y^2 = 96. \end{cases}$

5. РАЗНОСТЬ МНОЖЕСТВ

Определение. *Разностью* двух множеств A и B называют такое множество, в которое входят все элементы из множества A, не принадлежащие множеству B.

Разность множеств A и B обозначают $A \setminus B$. Диаграммы Эйлера — Венна, соответствующие операции вычитания множеств A и B, построены на рисунке 14. На нем заштрихованы множества $A \setminus B$. Если $A = B$, то $A \setminus B = \varnothing$.

В случае, когда B есть подмножество множества A, разность $A \setminus B$ называют *дополнением множества* B в множестве A и обозначают



а) б) в)

Рис. 14

$C_A B$*). Например, дополнением множества четных чисел в множестве всех целых чисел является множество нечетных чисел. Дополнением множества всех квадратов в множестве прямоугольников является множество всех прямоугольников с неравными сторонами. А дополнением того же множества квадратов в множестве всех ромбов является множество ромбов с неравными смежными углами.

Разность множеств использовалась нами при решении уравнений с переменной в знаменателе (гл. II, п. 11). Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые многочлены. Рассмотрим уравнение $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$. Если обозначить через A множество корней уравнения $P(x)=0$, а через B множество корней уравнения $Q(x)=0$, то множество корней уравнения $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ равно $A \setminus B$. Действительно, как известно, дробь равна нулю, если ее числитель равен 0, а знаменатель не равен 0. Значит, если x_0 — корень уравнения $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, то $P(x_0)=0$, а $Q(x_0)\neq 0$, т. е. $x_0 \in A$, но $x_0 \notin B$. А это и означает, что $x_0 \in A \setminus B$. Верно и обратное. Если $x_0 \in A \setminus B$, то $x_0 \in A$ и $x_0 \notin B$. Это значит, что $P(x_0)=0$ и $Q(x_0)\neq 0$, т. е. x_0 — корень уравнения $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$.

УПРАЖНЕНИЯ

48. Что представляет собой множество: а) $C_A A$; б) $C_A \varnothing$?

49. Пусть $A=[1; 4]$, $B=[2; 6]$. Найдите множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Чему равно множество $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?

50. Пусть $A=\{x \mid x=2m-1,\ m$ — целое число$\}$, $B=\{x \mid x=4n+1,\ n$ — целое число$\}$. Опишите множество $A \setminus B$.

51. Найдите множество корней уравнения:

а) $\frac{1+x-6x^2}{3x+1}=x$; б) $\frac{x+x^3-2x^2}{5x^3-5}=0$; в) $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^3+4x^2+3x}=0$.

52. Найдите дополнение множества правильных треугольников в множестве всех треугольников; всех правильных многоугольников.

6. АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

Алгеброй множеств называется часть теории множеств, в которой изучаются свойства операций над множествами.

В предыдущих пунктах рассматривались операции пересечения, объединения и вычитания множеств. Операции пересечения и объединения множеств обладают многими свойствами, напоминающи-

*) C — начальная буква слова complement — дополнение (фр.).

ми свойства умножения и сложения чисел. Перечислим основные свойства операций над множествами.

1) Свойство коммутативности (перестановочности) объединения и пересечения: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

2) Свойство ассоциативности (сочетательности) объединения и пересечения: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3) Свойство дистрибутивности (распределительности) пересечения относительно объединения:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad (1)$$

4) Выполняются равенства

$$A \cup \varnothing = A, \; A \cap \varnothing = \varnothing,$$

т. е. роль нуля в алгебре множеств играет пустое множество.

Доказывать эти свойства мы не будем, а проиллюстрируем справедливость, например, свойства 3 с помощью диаграмм Эйлера — Венна. На рисунке 15, *а* заштриховано пересечение множества A с множеством $B \cup C$, а на рисунке 15, *б* — объединение пересечений A с B и A с C. Эти рисунки делают равенство (1) очевидным.

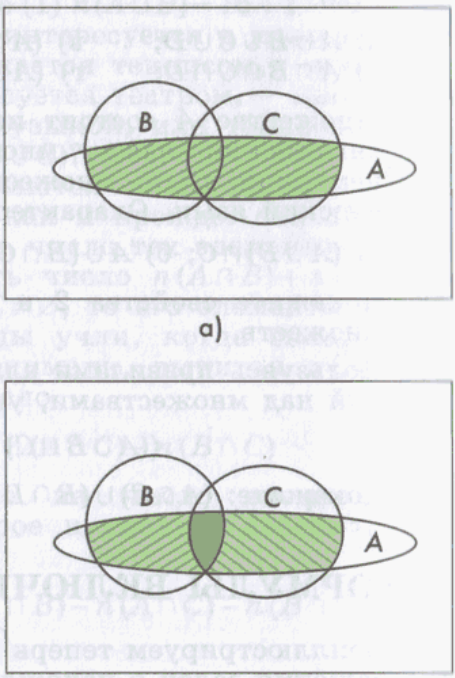


Рис. 15

Однако алгебра множеств имеет и своеобразные черты. Ее основное своеобразие состоит в том, что если одно из множеств A и B является подмножеством другого, то формулы для объединения и пересечения множеств упрощаются. Именно: если $A \subset B$, то

$$A \cup B = B \text{ и } A \cap B = A.$$

Это сразу становится ясно из рисунка 16. В частности, при $B = A$

$$A \cup A = A \text{ и } A \cap A = A.$$

Отметим, что для множеств есть второй «распределительный закон», аналога которому нет для чисел. Он выражается формулой

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (2)$$

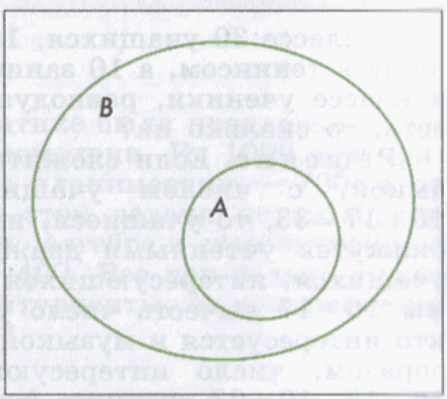


Рис. 16

УПРАЖНЕНИЯ

53. Найдите объединение множеств остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников.

54. Пусть $A=[1;\ 6]$, $B=[2;\ 7]$, $C=[-1;\ 3]$, $D=[2;\ 5]$. Найдите множество:

а) $A\cup B\cup C\cup D$; в) $(A\cap B)\cup(C\cap D)$; д) $((A\cup B)\cap C)\cup D$.
б) $A\cap B\cap C\cap D$; г) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$;

55. Множество A состоит из учеников данного класса, изучающих английский язык, множество B — из учеников, изучающих немецкий язык, множество C — из учеников, изучающих французский язык. Охарактеризуйте множество:

а) $(A\cup B)\cap C$; б) $A\cup(B\cap C)$; в) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$.

56. Докажите свойства 2 и 4 операций объединения и пересечения множеств.

57. Пользуясь правилами алгебры множеств и определениями операций над множествами, упростите выражение

$$((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))\setminus((A\cup(B\setminus C))\cap A).$$

58. Докажите: $(A\cap C)\cup(B\cap D)\subset(A\cup B)\cap(C\cup D)$.

7. ФОРМУЛЫ ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ

Проиллюстрируем теперь применение операций над множествами для решения задач о нахождении числа элементов множеств, заданных несколькими условиями. Ниже мы будем рассматривать только конечные множества A и через $n(A)$ обозначать число их элементов.

Задача 1.

В классе 30 учащихся, 16 из них занимаются музыкой, 17 увлекаются теннисом, а 10 занимаются и музыкой, и теннисом. Есть ли в классе ученики, равнодушные и к музыке, и к теннису, и если есть, то сколько их?

Решение. Если сложить число учащихся, интересующихся музыкой, с числом учащихся, занимающихся теннисом, т. е. $16+17=33$, то учащиеся, интересующиеся и музыкой, и теннисом, окажутся учтенными дважды. Поэтому, чтобы определить число учащихся, интересующихся музыкой или теннисом, нужно из суммы $16+17$ вычесть число учащихся, учтенных дважды, т. е. тех, кто интересуется и музыкой, и теннисом. По условию их 10. Таким образом, число интересующихся теннисом или музыкой равно $16+17-10=23$ ученика. А так как в классе всего 30 учащихся, то $30-23=7$ учащихся равнодушны и к музыке, и к теннису.

Задача 1 решена по следующему алгоритму. Пусть имеется два конечных множества A и B. Тогда

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \quad (1)$$

В нашем случае A — множество учащихся, интересующихся музыкой, и $n(A) = 16$, B — множество учащихся, интересующихся теннисом, и $n(B) = 17$, $n(A \cap B) = 10$, и тогда по формуле (1) $n(A \cup B) = 16 + 17 - 10 = 23$.

Усложним задачу: пусть к тем, кто интересуется в классе музыкой,— множеству A и к тем, кто увлекается теннисом,— множеству B добавляются еще и те, кто интересуется театром,— множество C. Сколько учеников увлекается или музыкой, или теннисом, или театром, т. е. чему равно число $n(A \cup B \cup C)$?

Если множества A, B и C пересекаются лишь попарно, т. е. $A \cap B \cap C = \varnothing$, то подсчет можно вести, как и прежде: сначала сложить $n(A) + n(B) + n(C)$, а затем вычесть число тех элементов, которые подсчитаны дважды, т. е. вычесть число $n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$. Если же множество $A \cap B \cap C \neq \varnothing$, то его элементы оказались неучтенными: сначала их трижды учли, когда складывали $n(A) + n(B) + n(C)$, а затем трижды отнимали, вычитая $n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$. Таким образом, число

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$

меньше истинного результата ровно на число элементов в пересечении множеств $A \cap B \cap C$, которое и следует добавить для получения верного результата

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C). \quad (2)$$

Аналогичная формула может быть получена для любого числа множеств.

В формулах (1) и (2) подсчитывается, сколько раз каждый элемент включается и исключается, поэтому их называют *формулами включений и исключений**).

Задача 2.

На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

---

*) Формулы включений и исключений часто называют формулами Грассмана в честь немецкого математика Г. Грассмана (1809—1887).

Решение. Пусть U — множество всех абитуриентов, A — множество абитуриентов, решивших задачу по алгебре, B — множество абитуриентов, решивших задачу по планиметрии, C — множество абитуриентов, решивших задачу по стереометрии. По условию $n(U)=1000$, $n(A)=800$, $n(B)=700$, $n(C)=600$, $n(A\cap B)=600$, $n(A\cap C)=500$, $n(B\cap C)=400$, $n(A\cap B\cap C)=300$. В множество $A\cup B\cup C$ включены все абитуриенты, решившие хотя бы одну задачу. По формуле (2) имеем $n(A\cup B\cup C)=800+700+600-600-500-400+300=900$. Отсюда следует, что не все поступающие решили хотя бы одну задачу. Ни одной задачи не решили

$$n(U)-n(A\cup B\cup C)=1000-900=100 \text{ (абитуриентов).}$$

Задача 3.

Социологи опросили 45 учащихся девятых классов, среди которых 25 юношей. При этом выяснилось: 30 человек имеют за полугодие оценки «4» и «5», из них 16 юношей, спортом занимаются 28 учеников, среди них 18 юношей, и 17 учеников, успевающих на «хорошо» и «отлично», 15 юношей учатся на «хорошо» и «отлично» и занимаются спортом.

Первый математик класса взглянул на результаты и заявил, что здесь есть ошибки. Как это ему удалось выяснить?

Решение. Обозначим через A множество юношей, через B множество учеников, успевающих на «4» и «5», через C множество спортсменов. По условию задачи $n(A)=25$, $n(B)=30$, $n(C)=28$, $n(A\cap B)=16$, $n(A\cap C)=18$, $n(B\cap C)=17$, $n(A\cap B\cap C)=15$. Найдем общее число учащихся, которые или являются юношами, или занимаются спортом, или успевают на «4» и «5». По формуле (2) получаем

$$n(A\cup B\cup C)=25+30+28-16-18-17+15=47.$$

Этого быть не может, так как обследовалось всего 45 учеников! Значит, в данных сведениях есть ошибки.

На рисунке 17 это решение проиллюстрировано с помощью диаграммы Эйлера—Венна. В пересечении множеств A, B и C запишем число 15, так как по условию $n(A\cap B\cap C)=15$. В множестве $(A\cap B)\setminus C$ запишем $16-15=1$, в множестве $(A\cap C)\setminus B$ — число $18-15=3$, в множестве $(B\cap C)\setminus A$ — число $17-15=2$, в множестве $A\setminus(B\cup C)$ — число $25-(1+15+3)=6$, в множестве $B\setminus(A\cup C)$ — число $30-(1+15+2)=12$, в множестве $C\setminus(A\cup B)$ — число $28-(3+15+2)=8$. Чтобы найти $n(A\cup B\cup C)$, достаточно сложить записанные числа. Получим число $47>45$, что невозможно по условию задачи.

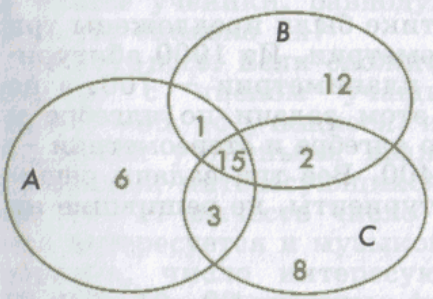


Рис. 17

УПРАЖНЕНИЯ

59. Из 100 студентов английский язык знают 28 студентов, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?

60. На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 48 человек, с сыром — 38 человек, с ветчиной — 42 человека, с сыром и с колбасой — 28 человек, с колбасой и с ветчиной — 31 человек, а с сыром и с ветчиной — 26 человек. 25 человек взяли с собой все три вида бутербродов, а несколько человек вместо бутербродов взяли пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

61. Из 35 учащихся класса 20 посещают математический кружок, 11 — физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический, и физический кружки? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

62. Каждый ученик класса либо девочка, либо блондин, либо любит математику. В классе 20 девочек, из них 12 блондинок и одна блондинка любит математику. Всего в классе 24 ученика-блондина, математику из них любят 12, а всего учеников (мальчиков и девочек), которые любят математику, 17, из них 6 девочек. Сколько учеников в данном классе?

63. В отделе института работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 человек знают английский, 6 — немецкий, 7 — французский, 4 знают английский и немецкий, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский язык? только французский? Сколько человек знает ровно 1 язык?

8*. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Мы знаем, что каждая дробь $\frac{a}{b}$ определяется парой чисел a и b, где a — числитель, $b \neq 0$ — знаменатель дроби. Если условиться эту пару обозначать $(a; b)$, т. е. на первом месте написать числитель, а на втором знаменатель, то такую пару чисел называют упорядоченной парой $(a; b)$. При этом числа a могут составлять некоторое множество A, а числа b — множество B. Поэтому возникает необходимость в рассмотрении множеств, составленных из пар элементов некоторых множеств A и B. В связи с этим рассматривают еще одну операцию над множествами — *декартово произведение множеств*.

Определение. *Декартовым произведением множеств A и B* называют множество, состоящее из всех упорядоченных пар вида $(a; b)$, где $a \in A$, $b \in B$.

Декартово произведение множеств обозначается $A \times B$. Итак,

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Пример: декартово произведение множеств $A = \{a; b\}$ и $B = \{1; 2; 3\}$ состоит из пар вида $(a; 1)$, $(a; 2)$, $(a; 3)$, $(b; 1)$, $(b; 2)$, $(b; 3)$, т. е. $A \times B = \{(a; 1); (a; 2); (a; 3); (b; 1); (b; 2); (b; 3)\}$. Декартово произведение множеств $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_m\}$ и $B = \{b_1; b_2; \ldots; b_k\}$ записывается в виде таблицы, состоящей из m строк и k столбцов:

$$\underbrace{\begin{cases} (a_1; b_1) & (a_1; b_2) & \ldots & (a_1; b_k) \\ (a_2; b_1) & (a_2; b_2) & \ldots & (a_2; b_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_m; b_1) & (a_m; b_2) & \ldots & (a_m; b_k) \end{cases}}_{k} \quad m \qquad (1)$$

Видно, что если множество A состоит из m элементов, а множество B — из k элементов, то декартово произведение $A \times B$ состоит из $m \cdot k$ элементов, т. е. имеет место утверждение:

если A и B — конечные множества, то множество $A \times B$ конечно и число его элементов равно произведению $n(A) \cdot n(B)$:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Отметим, что если в произведении $A \times B$ хотя бы одно из множеств A, B пусто, то и произведение $A \times B = \varnothing$.

Поскольку $n(A) \cdot n(B) = n(B) \cdot n(A)$, то $n(A \times B) = n(B \times A)$. Однако множества $A \times B$ и $B \times A$ различны, так как пары $(a; b)$ и $(b; a)$ отличаются порядком элементов.

Хорошо знакомым вам примером декартова произведения множеств является таблица умножения, которая является декартовым произведением множеств

$$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} \times \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Если A и B — числовые множества, то на координатной плоскости декартово произведение $A \times B$ задает некоторое множество точек плоскости с координатами $(a; b)$, где $a \in A$, $b \in B$. Поэтому в паре $(a; b)$ a обычно называют первой координатой, а b — второй координатой.

Можно рассматривать декартово произведение не только двух множеств A и B, а любого конечного числа множеств A_1, A_2, …, A_k: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$. Элементами такого произведения будут так называемые *кортежи* $(a_1; a_2; \ldots; a_k)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_k \in A_k$.

УПРАЖНЕНИЯ

64. Запишите декартовы произведения множеств $A \times B$ и $B \times A$, если:

а) $A = \{1; 3; 5; 7\}$, $B = \{2; 4; 6\}$;
б) $A = \{a; б; в; г\}$, $B = \{8; 9; 10\}$;
в) $A = \{\text{Абакан; Москва; Калуга}\}$, $B = \{\text{Юра; Петя; Коля}\}$;
г) $A = \{\text{красная; зеленая; желтая; белая}\}$, $B = \{\text{ночь; трава; ткань; вода}\}$.

65. Запишите множества A и B, если:

а) $A \times B = \{(3; x); (3; x^2); (3; x^3)\}$;

б) $A \times B = \left\{\left(\frac{1}{2}; 2\right); \left(\frac{1}{3}; 3\right); (1; 3); \left(\frac{1}{3}; 2\right); \left(\frac{1}{2}; 3\right); (1; 2)\right\}$;

в) $A \times B = \{(a; a); (a; b); (c; a); (c; b)\}$.

66. Запишите множество C дробей $\frac{a}{b}$, где $a \in A$, $b \in B$, если:

а) $A \times B = \{(1; 3); (1; 5); (1; 7); (2; 3); (2; 5); (2; 7)\}$;
б) $A \times B = \{(x^2+1; x^3+2); (x^2+1; x^4+4); (x^2+1; x^3+3); (x-1; x^3+2); (x-1; x^4+4); (x-1; x^3+3); (2; x^3+2); (2; x^4+4); (2; x^3+3)\}$;
в) $A \times B = \{(x^4+4; x^2+2); (x^4+4; x+1); (x^4+4; x^3+3); (5; x^2+2); (5; x+1); (5; x^3+3); (x^5+5; x^2+2); (x^5+5; x+1); (x^5+5; x^3+3)\}$;
г) $A \times B = \{(c; 2); (c; f); (c; g); (d; 2); (d; f); (d; g); (e; 2); (e; f); (e; g)\}$.

67. Запишите декартово произведение $A \times A$, если:

а) $A = \{1; 2; 3\}$;
б) $A = \left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\right)\right\}$;
в) $A = \{a; б; в; г\}$;
г) $A = \{\text{Вена; Осло; Париж; Лондон}\}$.

68. В весенние каникулы встречались команды шахматистов 8 А и 8 Б классов. Каждая команда состояла из 4 человек. Состав команды 8 А класса: $A = \{\text{Петя; Коля; Юра; Таня}\}$, 8 Б класса: $B = \{\text{Миша; Витя; Боря; Оля}\}$. По условию встречи каждый игрок одной команды встречался с каждым игроком другой команды. Запишите множество $A \times B$ всех встреч.

69. Отметьте на координатной плоскости точки, являющиеся элементами множества $A \times B$, если:

а) $A = \{2; 3; -4; 7\}$, $B = \{-2; 4\}$;
б) $A = \{-2; 4\}$, $B = \{2; 3; -4; 7\}$;
в) $A = \{-1; 3\}$, $B = \{2; 5; -6\}$;
г) $A = \{2; 5; -6\}$, $B = \{-1; 3\}$.

9*. ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА

Во многих вопросах важным является установление того или иного порядка во множестве изучаемых объектов. Например, на занятиях по физической культуре множество учащихся класса упорядочивают по росту, учитель в своем журнале упорядочивает это мно-

жество по алфавиту. В таких случаях говорят, что во множестве введено отношение порядка. В первом случае множество учащихся упорядочено с помощью отношения «выше», во втором случае — с помощью отношения «следовать за в порядке алфавита».

Пусть A — множество учащихся класса, упорядоченное по росту, т. е. для любой пары $(a; b)$ элементов множества A можно записать: «a выше, чем b». Если взять две пары учащихся $(a; b)$ и $(b; c)$, связанные данным отношением, то из выполнения «a выше b» и «b выше c» будет следовать выполнение «a выше c». В этом случае говорят, что отношение удовлетворяет условию *транзитивности*. Рассматриваемое отношение «выше» удовлетворяет также условию асимметричности. То есть если «a выше b», то не может быть «b выше a».

В общем случае имеет место:

Определение. Во множестве A *определено отношение D строгого порядка*, если каким-либо характеристическим свойством задано подмножество D декартова произведения $A \times A$, удовлетворяющее условию транзитивности и асимметричности. При этом отношение D асимметрично, если из $(a; b) \in D$ следует, что $(b; a) \notin D$, и транзитивно, если из $(a; b) \in D$ и $(b; c) \in D$ следует, что $(a; c) \in D$.

Характеристическое свойство, которым определяется отношение D, часто обозначают некоторым символом. Например, для рассмотренного отношения «a выше b» можно ввести знак $>$ и записывать $a > b$.

Отношение D строгого порядка во множестве A называют *линейным*, если для любых $a \in A$ и $b \in A$ либо $(a; b) \in D$, либо $(b; a) \in D$. Например, отношение $m < n$ во множестве натуральных чисел N линейно.

Наряду с отношениями строгого порядка рассматривают отношения нестрогого порядка, являющиеся объединением отношения строгого порядка и отношения равенства. Примером такого отношения в математике может служить нестрогое неравенство $a \leqslant b$.

УПРАЖНЕНИЯ

70. Среди следующих отношений укажите отношения строгого порядка:
а) отрезок x длиннее отрезка y;
б) отрезок x короче отрезка y в 2 раза;
в) отрезки x и y имеют равные длины;
г) у отрезков x и y есть общий конец.

71. На множестве людей заданы следующие отношения:
а) быть старше по возрасту;
б) быть сестрой;
в) быть выше по росту;
г) жить в одном и том же доме.
Какие отношения являются отношениями строгого порядка?

72. В классе проведена контрольная работа по математике, за которую ученики получили оценки «5», «4», «3» и «2». На множестве работ введем отношение «иметь оценку выше». Будет это отношение отношением строгого или нестрогого порядка?

73. В множестве чисел рассматриваются отношения: больше, больше на 2, равно, непосредственно следует за, делится на. Какие из них являются отношениями строгого порядка?

74. Среди следующих отношений укажите отношения нестрогого порядка: «число x не меньше числа y», «человек x — друг человека y», «человек x знаком с человеком y», «натуральное число x кратно натуральному числу y», «дом x не выше, чем дом y», «окружность x лежит внутри окружности y».

10. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МНОЖЕСТВА

До сих пор мы рассматривали множества с точки зрения операций над ними. Теперь займемся сравнением множеств по количеству элементов.

Для конечных множеств задача их сравнения по количеству элементов решается двумя путями.

1. Чтобы узнать, одинаковое ли число элементов в конечных множествах A и B, достаточно пересчитать их. Если $n(A)=n(B)$, то в множествах A и B поровну элементов; если же $n(A)<n(B)$, то в множестве B элементов больше.

Ясно, что для бесконечных множеств такой способ не годится: начав пересчитывать элементы бесконечного множества, мы никогда не окончим этого счета!

2. Для конечных множеств есть и другой способ их сравнения. Например, чтобы узнать, хватит ли стульев в классе для всех учеников, совсем не обязательно их пересчитывать — достаточно попросить учеников сесть на стулья. Если все стулья окажутся занятыми и не будет стоящих учеников, то можно быть уверенным, что стульев и учеников одинаковое число. Если же оказалось, что есть незанятые стулья, а все ученики уже сидят, то ясно, что учеников меньше, чем стульев. Описанный подход может быть использован и для сравнения бесконечных множеств.

Пусть нам даны два множества A и B (конечные или бесконечные). Предположим, что существует правило, которое каждому элементу $a\in A$ ставит в соответствие единственный элемент $b\in B$, и при этом выполняются следующие свойства:

1) Различным элементам $a_1\in A$, $a_2\in A$ соответствуют различные элементы $b_1\in B$, $b_2\in B$, т. е. если $a_1\neq a_2$, то $b_1\neq b_2$.

2) Каждый элемент $b\in B$ поставлен в соответствие некоторому элементу $a\in A$. В этом случае говорят, что между множествами A и B установлено *взаимно-однозначное соответствие*.

Пример взаимно-однозначного соответствия между множествами A и B приведен на рисунке 18, *а*. Соответствие между множествами A и B

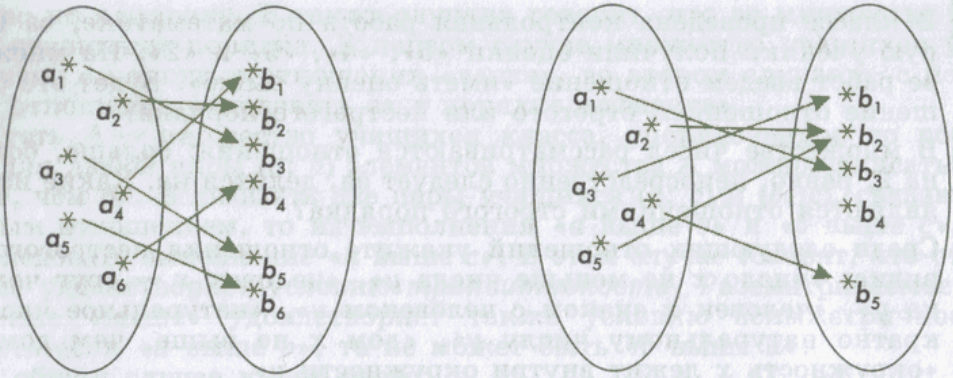


Рис. 18 а) б)

на рисунке 18, *б* не является взаимно-однозначным, поскольку различным элементам a_2 и a_5 множества A соответствует один элемент $b_2 \in B$, а элемент $b_4 \in B$ не соответствует никакому элементу множества A.

Существование взаимно-однозначного соответствия между конечными множествами равносильно тому, что они содержат одинаковое число элементов. Важнейшая заслуга Г. Кантора состояла в том, что он применил идею взаимно-однозначного соответствия для сравнения бесконечных множеств.

Множества A и B называются *эквивалентными*, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие. О множествах A и B в этом случае говорят, что они имеют одинаковую мощность. Таким образом, для бесконечных множеств слово «мощность» означает то же, что для конечных множеств «число элементов».

Пример 1.

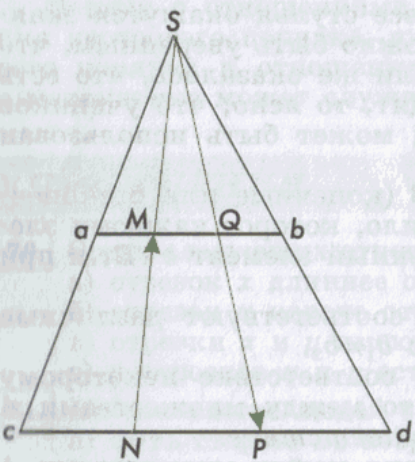


Рис. 19

Пусть A — множество точек отрезка $[a; b]$, B — множество точек отрезка $[c; d]$. На рисунке 19 показано, как установить взаимно-однозначное соответствие между множествами A и B. Для этого через концы отрезков a и c, b и d проведем прямые, пересекающиеся в точке S. Каждой точке $Q \in A$ поставим в соответствие точку $P \in B$ следующим образом. Соединим точку Q с точкой S отрезком прямой. Эта прямая пересечет отрезок $[c; d]$ в единственной точке P, которую и поставим в соответствие точке Q. Очевидно, что

если $Q_1 \neq Q_2$, то $P_1 \neq P_2$.

При этом каждая точка $N \in [c; d]$ соответствует некоторой точке $M \in [a; b]$.

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно провести прямую NS точка M ее пересечения с отрезком $[a; b]$ и будет искомой.

Поскольку между множествами A и B установлено взаимно-одно значное соответствие, они имеют одинаковую мощность.

Этот пример показывает, что для бесконечных множеств переста ет быть справедливым утверждение, что «часть меньше целого». Оно справедливо для конечных множеств, но для бесконечных мно жеств оно уже неверно. Еще один пример.

Пример 2.

Пусть N — множество натуральных чисел, M — множество чет ных чисел. Очевидно, что M — подмножество N. Установим межд ними взаимно-однозначное соответствие, поставив в соответстви элементу $n \in N$ элемент $2n \in M$:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

Это означает, что множества N и M имеют одинаковую мощность.

Множества, эквивалентные множеству натуральных чисел, назы вают *счетными* множествами. Более подробно такие множества мы рассмотрим в следующей главе.

УПРАЖНЕНИЯ

75. Пусть A — множество всех окружностей на плоскости, B — мно жество всех квадратов на плоскости со сторонами, параллельны ми осям координат. Каждому квадрату ставится в соответстви вписанная в него окружность. Является ли это соответствие вза имно-однозначным?

76. Пусть A — множество всех окружностей на плоскости, B — мно жество всех правильных треугольников на этой плоскости. Каж дому треугольнику ставится в соответствие вписанная в нег окружность. Является ли это соответствие взаимно-однозначным

77. Пусть A — множество всех окружностей на плоскости и B — мно жество всех точек этой плоскости. Каждой окружности ставится в соответствие ее центр. Является ли это соответствие взаимно-од нозначным?

78. Каждой прямой, не параллельной оси ординат, ставится в соотве ствие уравнение $y = kx + b$. Будет ли это соответствие взаимно-од нозначным?

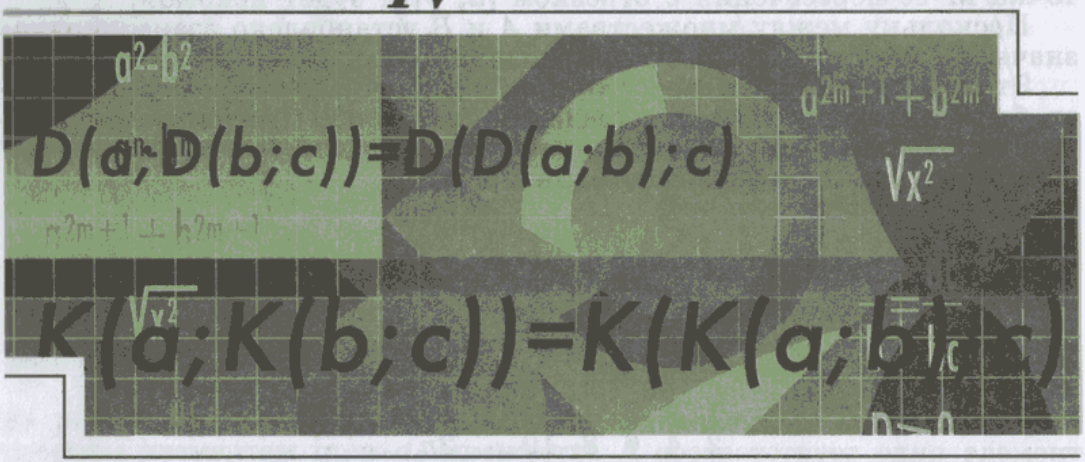
79. Устанавливает ли функция $y = 4x - 3$ взаимно-однозначное соотве ствие между отрезками $[2; 4]$ и $[5; 13]$?

80. Выберите прямую $y = kx + b$ и два отрезка, между которыми он устанавливает взаимно-однозначное соответствие.

81. Устанавливает ли функция $y = x^2$ взаимно-однозначное соотве ствие между отрезками:

а) $[-2; 4]$ и $[0; 16]$; б) $[2; 4]$ и $[4; 16]$?

Глава IV



ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА

В 5—6 классах мы изучали свойства натуральных, целых и рациональных чисел и арифметические операции над этими числами. В основе изучения целых и рациональных чисел лежали свойства натуральных чисел и операций над ними. В самом деле, положительное рациональное число задается парой натуральных чисел (числителем и знаменателем дроби, изображающей это число) и все операции над такими числами сводятся к операциям над их числителями и знаменателями. Отрицательные числа получаются путем приписывания знака «минус» к положительному числу. Поэтому в основе всей арифметики лежат натуральные числа.

По сути дела, вся теория натуральных чисел сводится к одному-единственному отношению — «следовать за». Например, 4 следует за числом 3, 17 — за числом 16 и т. д. При этом есть число 1, которое ни за каким другим натуральным числом не следует. Существуют четыре свойства отношения следования, из которых можно вывести все остальные свойства натуральных чисел и операций над ни-

ми. Эти свойства сформулировал итальянский математик Джузепп Пеано (1858—1932) в 1891 г.*). Перечислим их:

• Единица — натуральное число, которое не следует ни за каки натуральным числом.

• За каждым натуральным числом следует одно и только одн число.

• Каждое натуральное число, отличное от 1, следует за одни и только одним натуральным числом.

• Подмножество натуральных чисел, содержащее число 1, а вм сте с каждым числом и следующее за ним число, содержит все н туральные числа.

Мы не будем показывать, как с помощью отношения следовани вводятся арифметические операции сложения, вычитания, умнож ния и деления для натуральных чисел и как доказываются свойс ва этих операций. Перечислим лишь некоторые основные утвержд ния, с которыми мы уже познакомились ранее.

а) Для натуральных чисел существуют операции сложения и ум ножения, причем сумма и произведение натуральных чисел являю ся натуральными числами.

б) Сложение и умножение натуральных чисел обладают свойс вами перестановочности и сочетательности:

$$a+b=b+a,\ ab=ba;$$

$$(a+b)+c=a+(b+c),\ (ab)c=a(bc).$$

в) Умножение натуральных чисел обладает свойством распред лительности относительно сложения:

$$a(b+c)=ab+ac.$$

г) Имеет место равенство $1 \cdot a=a$.

Далее к натуральным числам присоединяют число 0, для кот рого выполняются равенства $a+0=a$ и $a \cdot 0=0$. После чего опред ляют отношение «a меньше b», означающее, что в последовательн сти 0, 1, 2, 3, ..., n, ... число a встречается раньше, чем b.

При этом **$a<b$ в том и только в том случае, когда найдется т кое натуральное число c, что $a+c=b$.** Число c называют ***разн стью*** чисел b и a и обозначают $b-a$. Имеют место равенства

$$a-b-c=a-(b+c),\ a-b+c=a-(b-c),\ (a-b)c=ac-bc$$

и т. д., известные из курса математики 6 класса. Мы опускаем и доказательство.

Отношение $a<b$ обладает следующими свойствами:

а) для любых чисел a и b выполняется одно и только одно из о ношений $a=b$, $b<a$, $a<b$;

б) если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$;

---

*) В теории натуральных чисел эти свойства называют аксиомами Пеан

в) в любом подмножестве натуральных чисел, содержащем хотя бы одно число, есть наименьшее число;

г) если $a<b$, то для любого натурального числа c имеем $a+c<b+c$ и $ac<bc$;

д) если $c<a<b$, то $a-c<b-c$.

Из сформулированных выше свойств натуральных чисел можно вывести ряд утверждений, из которых отметим следующие:

1) Равенство $ab=0$ выполняется в том и только в том случае, когда один из множителей равен нулю.

В самом деле, если $a=0$ или $b=0$, то $ab=0$, как отмечалось выше. Обратно, если $a\neq 0$ или $b\neq 0$, то a и b — натуральные числа, а потому их произведение — натуральное число, а не нуль.

2) Если $k\neq 0$ и $ak=bk$, то $a=b$.

В самом деле, имеем $0=ak-bk=(a-b)k$. Так как $k\neq 0$, то из этого равенства следует, что $a-b=0$, т. е. $a=b$.

В дальнейшем множество целых неотрицательных чисел будем обозначать N_0: $N_0=N\cup\{0\}$.

2. ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Одним из важнейших понятий арифметики целых неотрицательных чисел является понятие делимости. Мы изучали его в 6 классе, но лишь разъясняли свойства делимости на примерах, а не доказывали их. Сейчас проведем доказательство этих свойств.

Определение. Число $a\in N_0$ *делится* на число $b\in N_0$, если есть такое число $c\in N_0$, что $a=bc$. В этом случае пишут $a:b$.

Так как для любого b имеем $0\cdot b=0$, то *для любого* $b\in N_0$ *справедливо*, что $0:b$. Если $a:b$ и $b\neq 0$, то существует лишь одно число $c\in N_0$, такое, что $a=bc$. В самом деле, если $a=bc_1$ и $a=bc_2$, причем $c_1\neq c_2$, то $0=bc_1-bc_2=b(c_1-c_2)$, чего не может быть, поскольку $b\neq 0$ и $c_1-c_2\neq 0$.

Единственное число c, такое, что $a=bc$, называют *частным* от деления a на $b(b\neq 0)$ и обозначают $a:b$ или $\frac{a}{b}$.

Из равенств $a=a\cdot 1$ и $a=1\cdot a$ следует, что для любого $a\in N_0$ имеем $a:a$ и $a:1$, причем $a:a=1$ при $a\neq 0$ и $a:1=a$.

Запись $0:0$ не имеет числового значения, так как для всех $b\in N_0$ справедливо равенство $0=b\cdot 0$ и потому $0:0$ не определено однозначно. Не имеет числового значения запись $a:0$ при $a\neq 0$, так как в этом случае нет ни одного числа $c\in N_0$, такого, что $a=0\cdot c$. Кратко говорят: **«Делить на нуль нельзя»**.

Легко доказываются следующие утверждения о делимости чисел из N_0.

1) *Если* $a \vdots b$ *и* $a > 0$, *то* $a \geqslant b$;
2) *если* $a \vdots b$ *и* $b \vdots a$, *то* $a = b$;
3) *если* $a \vdots b$ *и* $b \vdots c$, *то* $a \vdots c$;
4) *если* $a \vdots c$ *и* $b \vdots c$, *то для любых чисел* m *и* n *из* N_0 *имеем* $(ma+nb) \vdots c$. *Если, кроме того,* $ma > nb$, *то* $(ma-nb) \vdots c$;
5) *если* $a \vdots b$ *и* $k \neq 0$, *то* $ak \vdots bk$;
6) *если* $ak \vdots bk$ *и* $k \neq 0$, *то* $a \vdots b$;
7) *если* $a \vdots bc$, *то* $(a:b) \vdots c$, *а если* $(a:b) \vdots c$, *то* $a \vdots bc$.

Докажем, например, свойство 3. Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то найдутся такие числа k и l из N_0, что $a = bk$ и $b = cl$. Но тогда имеем $a = (cl)k = c(lk)$. Поскольку $lk \in N_0$, то $a \vdots c$.

Чтобы доказать свойство 6, заметим, что в силу $ak \vdots bk$ найдется такое число $c \in N_0$, что $ak = (bk)c = (bc)k$. Так как $k \neq 0$, то равенство $ak = (bc)k$ может выполняться лишь тогда, когда $a = bc$. Значит, $a \vdots b$.

Предоставляем читателю доказать остальные утверждения о делимости.

При доказательстве различных утверждений о натуральных числах часто используют следующие утверждения о подмножествах множества N_0 целых неотрицательных чисел:

а) В любом непустом множестве чисел из N_0 есть наименьшее число.

б) В любом непустом конечном множестве чисел из N_0 есть наибольшее число.

Пример 1.

Докажем, что для любых двух натуральных чисел a и b, таких что $b \leqslant a$, найдется такое натуральное число q, что $bq \leqslant a < b(q+1)$.

Решение. Рассмотрим множество $A = \{c \mid c \in N,\ bc \leqslant a\}$. Это множество непусто, так как ему принадлежит число 1. В самом деле $b \cdot 1 = b \leqslant a$. Далее, A конечно, так как все числа из A не больше, чем a. Действительно, если $c > a$, то $bc > ab \geqslant a$, и потому $c \notin A$. По утверждению б) из сказанного выше следует, что в A есть наибольшее число q. Это значит, что $bq \leqslant a$, и $b(q+1) > a$.

Докажем следующую теорему:

Теорема. Если a и b — натуральные числа, такие, что $a \geqslant b$ и $b > 1$, то найдутся такие числа q и r из N_0, что $a = bq + r$, причем $0 \leqslant r < b$.

Доказательство. Как мы видели в примере 1, из $b \leqslant a$ следует, что существует такое число $q \in N$, что $bq \leqslant a < b(q+1)$. Обозначим разность $a - bq$ через r. Тогда имеем $a = bq + r$, причем $0 \leqslant r < b$. Теорема доказана.

Покажем, что числа q и r, для которых $a = bq + r$ и $0 \leqslant r < b$, однозначно определяются числами a и b. В самом деле, пусть $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, причем $0 \leqslant r_1 < r_2 < b$. Тогда $0 = (bq_1 + r_1) - (bq_2 + r_2) =$

$= b(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$, и потому $r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$. Значит, $r_2 - r_1$ делится на b. Поскольку $b \neq 0$, отсюда следует, что $r_2 - r_1 \geqslant b$. Но этого не может быть, так как $0 \leqslant r_1 < r_2 < b$, и потому $r_2 - r_1 < b$. Аналогично доказывается невозможность неравенства $r_2 < r_1$, поэтому $r_1 = r_2$. Но тогда $bq_1 = bq_2$, и так как $b \neq 0$, то $q_1 = q_2$.

Итак, пара чисел $(q; r)$ однозначно определяется заданием пары чисел $(a; b)$. Число q называют *неполным частным* при делении a на b, а число r — *остатком* при делении.

Пример 2.

Докажем, что среди k последовательных натуральных чисел n, $n+1$, ..., $n+k-1$ одно число делится на k.

Решение. По доказанной теореме $n = kq + r$, где $0 \leqslant r < k$. Если $r = 0$, то $n \vdots k$, а следующее число, делящееся на k, равно $n+k$, т. е. рассматриваемому множеству чисел не принадлежит. Пусть $r > 0$. Из условия $0 < r < k$ получаем $-k < -r < 0$, $0 < k - r < k$, $n < n + k - r < n + k$, т. е. число $n + k - r$ принадлежит рассматриваемому множеству чисел. Кроме того, $n + k - r = kq + r + k - r = kq + k = k(q+1) \vdots k$. Ближайшие числа, делящиеся на k, $n - r$ и $n + 2k - r$ не совпадают ни с одним из данных чисел, т. е. и при $r > 0$ среди данных чисел имеется только одно число, делящееся на k.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что натуральное число вида $a^3 + 1$ делится на $a + 1$.
2. Докажите, что натуральное число вида $n^2 + 5n + 6$ делится на $n + 2$.
3. Докажите, что трехзначное число, записанное тремя одинаковыми цифрами, делится на 37.
4. Докажите, что четырехзначное число, у которого цифра тысяч равна цифре сотен, а цифра десятков — цифре единиц, делится на 11.
5. В шестизначном числе совпадают цифры в классах тысяч и единиц (например, 245 245). Докажите, что это число делится на 11, на 13 и на 7.
6. Запишите три раза двузначное число (например, 626 262). Докажите, что получившееся шестизначное число делится на 7, на 13 и на 37.
7. Докажите, что если все слагаемые, кроме одного, делятся на b, а одно слагаемое не делится на b, то и сумма не делится на b.
8. Известно, что сумма двух чисел делится на b. Следует ли отсюда, что каждое слагаемое делится на b?
9. Известно, что произведение двух чисел делится на b. Следует ли отсюда, что каждый множитель делится на b?
10. Известно, что разность чисел a и b делится на m, равно как и разность чисел b и c. Следует ли отсюда, что разность чисел a и c делится на m?

11. Докажите, что если разность чисел a и b делится на m и $m \neq 0$, то разность чисел ak и bk делится на mk.

12. Известно, что числа a и b делятся на m, а разность $a-b$ этих чисел делится на c. Следует ли отсюда, что число $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$ делится на c?

13. Заполните следующую таблицу, если a — делимое, b — делитель, q — неполное частное, r — остаток при делении.

a	1729		5611	85
b	381	18		
q		411	701	
r		7	3	6

14. Докажите, что квадрат любого числа либо делится на 9, либо дает при делении на 3 остаток 1.

15. Докажите, что число вида n^3-n, где $n \in N$, делится на 6.

16. Докажите, что число вида n^3-3n^2-4n, где n — натуральное число, делится на 6.

17. Докажите, что при любых a и b, где $a>b$, число $ab(a^2-b^2)$ делится на 3.

18. Докажите, что число n^5-n при всех натуральных значениях n делится на 5.

19. Докажите, что число вида $ab(a^4-b^4)$, где a и b — натуральные числа и $a>b$, делится на 5.

20. Докажите, что число вида n^7-n при всех натуральных значениях n делится на 7.

21*. Всегда ли число вида n^4-n делится на 4? Всегда ли число вида n^6-n делится на 6? Из результатов этой задачи и задач 18 и 20 сделайте предположение, когда число вида n^p-n при всех n делится на p.

22. Докажите, что если a — нечетное число, то a^2-1 делится на 8.

23. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

3. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ ДВУХ ЧИСЕЛ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

Если натуральное число a делится на натуральное число b, то b называют *делителем* числа a, а число a называют *кратным* числа b.

Все свойства делимости чисел (см. п. 2) можно выразить либо с помощью слова «делитель», либо с помощью слова «кратное». Например, свойство 3 п. 2 можно выразить так: «Если b — делитель a, а c — делитель b, то c — делитель a» — либо так: «Если число a кратно числу b, а число b кратно числу c, то a кратно c».

Пусть a и b — натуральные числа. Число c называют **общим делителем** для a и b, если оно является делителем и для a, и для b. Множество общих делителей чисел a и b конечно, так как ни один из этих делителей не может быть больше, чем a. Значит, среди этих делителей есть наибольший, который называют **наибольшим общим делителем** чисел a и b и для его обозначения используют следующие записи:

$$\text{НОД}\ (a;\ b),\ D(a;\ b).$$

В дальнейшем для обозначения наибольшего общего делителя чисел a и b будем использовать $D(a;\ b)$. Например, делители числа 48 составляют множество чисел $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$, а делители числа 60 — множество чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. Пересечение этих множеств определяет множество чисел $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, являющихся общими делителями чисел 48 и 60. Наибольшим из этих общих делителей является число 12, значит, $D(48;\ 60)=12$.

Общим кратным натуральных чисел a и b называется натуральное число, которое кратно и a, и b. Например, число 120 является общим кратным для чисел 20 и 15, так как оно делится и на 20, и на 15, т. е. кратно и 20, и 15. Среди общих кратных натуральных чисел a и b есть наименьшее. Его называют **наименьшим общим кратным** этих чисел и обозначают НОК $(a;\ b)$ или $K(a;\ b)$. Предоставляем читателю составить списки кратных чисел 48 и 60 и доказать, что $K(48;\ 60)=240$.

Аналогично определяются наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел. При этом справедливы равенства

$$D(a;\ D(b;\ c))=D(D(a;\ b);\ c) \qquad (1)$$

и

$$K(a;\ K(b;\ c))=K(K(a;\ b);\ c), \qquad (2)$$

доказать которые мы предлагаем читателю.

Составление списков делителей чисел, нахождение одинаковых чисел в этих списках и выбор наибольшего из них весьма трудоемкая процедура. Существует иной способ отыскания наибольшего общего делителя двух чисел, известный под названием *алгоритм Евклида**). Он основан на следующих утверждениях:

а) **Если a и b — натуральные числа, причем $a \vdots b$, то $D(a;\ b)=b$.**

б) **Если a и b — натуральные числа, такие, что $a>b$, то $D(a;\ b)=D(a-b;\ b)$.**

---

*) Евклид — древнегреческий математик, о жизни которого нет достоверных данных. Считается, что он жил в III в. в г. Александрии. Ему принадлежит выдающееся научное произведение «Начала», в котором излагаются основы всей древнегреческой математики.

Для доказательства утверждения а) заметим, что если $a:b$, то b является общим делителем a и b. При этом число b является наибольшим из общих делителей a и b, поскольку все делители числа b не превосходят b. Утверждение же б) следует из того, что если m — общий делитель для a и b, то и число $a-b$ делится на m. Обратно, если m — общий делитель для b и $a-b$, то и число a делится на m, поскольку $a=b+(a-b)$ (см. свойства делимости в п. 2). Значит, общие делители как у чисел a и b, так и у чисел $a-b$ и b одинаковы, а тогда совпадают и наибольшие общие делители этих чисел.

Пользуясь равенством $D(a;\ b)=D(a-b;\ b)$, можно последовательно уменьшать рассматриваемые числа до тех пор, пока не дойдем до такой пары чисел, что одно из них делится на другое. Тогда меньшее из этих чисел и будет искомым наибольшим общим делителем для чисел a и b.

Вместо того чтобы вычитать b до тех пор, пока разность не станет меньше, чем b, можно воспользоваться операцией деления с остатком. В самом деле, если $a=bq+r$, где $0\leqslant r<b$, то $r=a-bq$ и потому получается из a с помощью последовательного вычитания числа b. Тем самым мы приходим к следующему алгоритму отыскания $D(a;\ b)$.

Пусть a и b — натуральные числа, причем $a\geqslant b$. Если a делится на b, то b и является искомым $D(a;\ b)$. В противном случае надо разделить a на b с остатком r_1, после этого разделить с остатком b на r_1 и продолжить этот процесс, пока деление не будет выполнено без остатка. Если r_n — последний отличный от нуля остаток, то $D(a;\ b)=r_n$.

Пример.

Найдем $D(7975;\ 2585)$.

Решение. Выполняя деление, получаем

$$\begin{array}{r|l} 7975 & 2585 \\ \hline 7755 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2585 & 220 \\ \hline 2420 & 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 220 & 165 \\ \hline 165 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 165 & 55 \\ \hline 165 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Так как последний отличный от нуля остаток равен 55, то $D(7975;\ 2585)=55$.

Докажем несколько свойств наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, которые будут применяться в дальнейшем.

1) **Любое общее кратное натуральных чисел a и b делится на $K(a;\ b)$.**

Докажем утверждение методом от противного. Предположим, что существует общее кратное s чисел a и b, не делящееся на $k=K(a;\ b)$.

Тогда при делении s на k получается не равный нулю остаток r, т. е. $s=kq+r$, где $0<r<k$. Но тогда $r=s-kq$, и поскольку $s:a$ и $k:a$, то и $r:a$. Аналогично доказывается, что $r:b$. Значит, r является отличным от нуля общим кратным a и b, а это невозможно, так как r меньше наименьшего общего кратного k этих чисел. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, и потому s делится на k.

2) Если $a:b$, то $K(a; b)=a$.

В самом деле, так как $a:a$ и $a:b$, то a — наименьшее общее кратное для a и b.

3) Если $K(a; b)=k$ и m — натуральное число, то $K(am; bm)=km$. Если d — общий делитель для a и b, то $K\left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}\right)=\frac{k}{d}$.

В самом деле, так как $k:a$ и $k:b$, то $km:am$ и $km:bm$, а потому km — общее кратное для am и bm. Покажем, что km — наименьшее общее кратное этих чисел. В самом деле, предположим, что s — натуральное число, такое, что $s:am$ и $s:bm$. Тогда $s:m$, причем $(s:m):a$ и $(s:m):b$. Значит, $s:m$ кратно a и b и потому делится на k, а тогда $s:m\geqslant k$ и потому $s\geqslant km$. Этим доказано, что km не превосходит все общие кратные для am и bm и потому является наименьшим общим кратным для am и bm, т. е. что $K(am; bm)=km$. Равенство $K\left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}\right)=\frac{k}{d}$ доказывается аналогично.

4) Если $a:c$ и $b:c$, то $\frac{ab}{c}$ — общее кратное чисел a и b.

В самом деле, по условию существует такое натуральное число m, что $a=cm$ и потому $ab=bcm$. Но тогда $\frac{ab}{c}=bm$, и, значит, $\frac{ab}{c}$ делится на b. Таким же образом доказывается, что $\frac{ab}{c}$ делится на a, и потому $\frac{ab}{c}$ является общим кратным для a и b.

5) Для любых натуральных чисел a и b выполняется равенство

$$D(a; b)\cdot K(a; b)=ab. \qquad (3)$$

В самом деле, обозначим $D(a; b)=d$, $K(a; b)=k$. Так как ab также является общим кратным для a и b, то по утверждению 1) $c=\frac{ab}{k}$ — натуральное число. При этом, поскольку k кратно a, найдется такое натуральное число m, что $k=am$, и потому $c=\frac{ab}{am}=\frac{b}{m}$. Значит, $b=cm$, т. е. c является делителем числа b. Таким же образом доказывается, что c — делитель числа a. Значит, c — общий делитель чисел a и b и потому не превосходит их наибольшего общего делителя d, $c\leqslant d$. Но тогда $k=\frac{ab}{c}\geqslant\frac{ab}{d}$. С другой стороны, по утверждению 4), число $\frac{ab}{d}$ также является общим кратным для a и b, и потому оно не меньше,

чем наименьшее общее кратное k тех же чисел, т. е. $\frac{ab}{d} \geqslant k$. Полученные неравенства $\frac{ab}{d} \geqslant k$ и $k \geqslant \frac{ab}{d}$ показывают, что $\frac{ab}{d} = k$, т. е. $ab = kd$. Это равенство означает, что верно равенство (3).

6) Любой общий делитель чисел a и b является делителем числа $D(a; b)$.

В самом деле, если $a : m$ и $b : m$, то $\frac{ab}{m} : a$ и $\frac{ab}{m} : b$. По утверждению 1) отсюда следует, что $\frac{ab}{m} : k$, т. е. $\frac{ab}{m} : \frac{ab}{d}$. Это значит, что $\frac{ab}{m} = \frac{ab}{d} \cdot s$. Отсюда вытекает равенство $d = sm$, т. е. d делится на m.

УПРАЖНЕНИЯ

24. Какие из делителей числа 144 кратны числу 18?

25. Найдите общие делители чисел 180 и 240 и выделите наибольший общий делитель.

26. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство $D(2n+2; 2n) = 2$.

27. Докажите, что $D(a; b) = D(5a+3b; 13a+8b)$.

28*. Докажите, что при любом натуральном значении n

$$D\left(2n+1; \frac{n(n+1)}{2}\right) = 1.$$

29. Найдите:

а) $K(846; 246)$; 1) 34 684; 2) 34 686; 3) 34 682; 4) 34 688;

б) $K(1960; 588)$; 1) 5880; 2) 5876; 3) 5890; 4) 5892.

30*. Какие значения может принимать $K(n; n+1; n+2)$, где n — натуральное число?

31. Туристы проехали за первый день 56 км, а за второй — 72 км, причем их скорость была одинаковой и выражалась целым числом километров в час и каждый день они были в пути целое число часов. Найдите скорость, с которой ехали туристы, если она была наибольшей из удовлетворяющих условию задачи.

32. Туристы прошли в первый день 36 км, во второй — 32 км и в третий — 24 км, причем в каждый день они были в пути целое число часов. Сколько часов они были в пути каждый день, если их скорость выражалась целым числом километров в час, была постоянной и наибольшей из удовлетворяющих условию задачи?

33. В три школьных киоска отправили по одинаковому числу тетрадей. Для одной школы отправили тетради пачками по 100 штук, для другой — по 150 штук, а для третьей — по 200 штук в каждой пачке. Сколько тетрадей отправили каждой школе, если число тетрадей, отправленных всем школам, меньше, чем 2000?

34. Сократите дробь $\frac{21120}{30720}$. 1) $\frac{17}{20}$; 2) $\frac{15}{19}$; 3) $\frac{11}{16}$; 4) $\frac{18}{23}$.

35. Приведите к одному знаменателю дроби $\frac{111}{21120}$ и $\frac{1237}{30720}$.

36. На столе лежат книги, число которых меньше, чем 100. Сколько лежит книг, если известно, что их можно связывать в пачки по 3, по 4 и по 5 штук?

37. На столе лежат книги, которые надо упаковать. Если их связывать по 2, то останется одна лишняя книга, если по 3, то останутся 2 книги, а если по 4, то останутся 3 книги. Найдите наименьшее число книг, удовлетворяющих этим условиям.

38. (Старинная задача.) Крестьянка несла на базар яйца. Проезжавший всадник толкнул ее, и все яйца разбились. На вопрос, сколько было яиц, она сказала: «Когда я раскладывала яйца по 2, одно оказалось лишним. То же самое случилось, когда я раскладывала их по 3, по 4, по 5 и по 6. А вот когда я их разложила по 7, остатка не оказалось». Сколько яиц было у крестьянки?

39. Сколько среди натуральных чисел от 1 до 60 включительно таких, которые: а) делятся на 3; б) делятся и на 3, и на 5; в) делятся на 3, но не делятся на 5; г) делятся на 5, но не делятся на 3; д) не делятся ни на 3, ни на 5?

40. Найдите числа a и b, если:

а) $a:b=\frac{11}{3}$, $D(a;\ b)=5$;

б) $D(a;\ b)=5$, $K(a;\ b)=105$;

в) $D(a;\ b)=7$, $ab=294$;

г) $K(a;\ b)=75$, $ab=375$;

д) $D(a;\ b)=3$, $K(a;\ b)=915$;

е) $a:b=\frac{7}{8}$, $K(a;\ b)=224$.

41. Проверьте равенство $D(a;\ b)\cdot K(a;\ b)=ab$ для чисел $a=21\,120$ и $b=30\,720$.

42. Докажите, что $\frac{D(ac;\ bc)}{D(a;\ b)}=\frac{K(ac;\ bc)}{K(a;\ b)}$.

43. С помощью алгоритма Евклида найдите $D(42628;\ 33124)$ и $D(71004;\ 154452)$.

44. С помощью алгоритма Евклида и формулы (3) найдите $K(469459;\ 519203)$.

45*. Докажите, что $K(1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1,\ 2n)=K(n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n)$.

4. ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА

В 6 классе было введено понятие о взаимно простых числах.

Определение. Натуральные числа a и b называют *взаимно простыми*, если наибольший общий делитель этих чисел равен 1, т. е. $D(a;\ b)=1$.

Например, взаимно просты числа 15 и 77. Всегда взаимно просты два соседних натуральных числа (например, 20 и 21). В самом деле, если бы оба числа делились на одно и то же натуральное число $m>1$, то их разность тоже делилась бы на m и не могла бы равняться 1.

Из равенства (3) п. 3 вытекает следующее утверждение:

1) Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно их произведению.

В самом деле, из того, что $D(a;\ b)=1$, следует $K(a;\ b)=ab$.

Вообще говоря, из того, что число a делится и на b, и на c, нельзя вывести, что это число делится на bc (например, $60 \vdots 6$ и $60 \vdots 4$, но 60 не делится на $4 \cdot 6=24$). Иначе обстоит дело, если эти делители взаимно просты.

2) Если числа b и c взаимно просты, причем $a \vdots b$ и $a \vdots c$, то $a \vdots bc$.

В самом деле, если $a \vdots b$ и $a \vdots c$, то по свойству 1) п. 3 $a \vdots K(b;\ c)$. Но для взаимно простых чисел b и c по утверждению 1) имеем $K(b;\ c)=bc$. Значит, $a \vdots bc$.

Наконец, докажем, что справедливо утверждение:

3) Если числа a и b взаимно просты, причем произведение ac делится на b, то c делится на b.

В самом деле, по условию $D(a;\ b)=1$ и $ac \vdots b$. Поскольку $ac \vdots a$, по утверждению 2) получаем $ac \vdots ab$, а тогда по свойству 6) п. 2 имеем $c \vdots b$.

УПРАЖНЕНИЯ

46. Докажите, что если $D(a;\ b)=1$, то $D(ac;\ b)=D(c;\ b)$.

47. Докажите, что если $D(a;\ b)=1$, то либо $D(11a+2b;\ 18a+5b)=1$, либо $D(11a+2b;\ 18a+5b)=19$.

48. Докажите, что если $D(a;\ b)=1$, то $D(ab;\ a+b)=1$.

49. Докажите, что если $D(a;\ b)=1$, то $D(a+b;\ a^2+ab+b^2)=1$.

50. Докажите, что если $D(n;\ 6)=1$, то n^2-1 делится на 24.

51. Докажите, что если $D(a;\ b)=1$, то $D(a^2;\ b^2)=1$.

52. Докажите, что если $D(a;\ b)=1$, а m и n — натуральные числа, то $D(a^m;\ b^n)=1$.

53. Какие из следующих высказываний истинны:

а) если $a \vdots 7$ и $a \vdots 5$, то $a \vdots 35$; б) если $a \vdots 10$ и $a \vdots 15$, то $a \vdots 150$; в) если a не делится на 3 или не делится на 5, то оно не делится на 15;

г) если число не делится на 7, то оно не делится на 175?

Объясните, почему утверждение г) верно для числа 14.

54. Докажите, что если ab делится на c и b не делится на c, то $D(a;\ c)\neq 1$.

55*. Докажите, что если из $2n$ идущих подряд натуральных чисел выбрать любым образом $n+1$ число, то среди выбранных чисел найдутся по крайней мере два взаимно простых числа.

Чтобы узнать, делится ли число a на число b, не всегда нужно выполнять письменно деление a на b. В некоторых случаях это можно узнать по десятичной записи чисел.

Запись $a=6018$ означает, что число a имеет вид

$$6\cdot 1000+0\cdot 100+1\cdot 10+8$$

или, иначе, вид

$$6\cdot 10^3+0\cdot 10^2+1\cdot 10+8.$$

Вообще говоря, сумму $a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0$ будем записывать так:

$$\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$$

(черта наверху показывает, что мы рассматриваем не произведение чисел a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0, а десятичную запись числа a).

Если существует такое натуральное число k, что 10^k делится на b, то на b делятся все числа 10^n, где $n>k$. Поэтому число a имеет при делении на b тот же остаток, что и число

$$a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_0.$$

Отсюда следует, что *если* 10^k *делится на* b, *то число* $a=\overline{a_n\ldots a_0}$ *делится на* b *в том и только в том случае, когда на* b *делится число* $\overline{a_{k-1}\ldots a_0}$.

Выведем из этого утверждения признаки делимости на числа 2, 4, 8, 5, 25, 125. Так как число 10 делится на 2, имеем:

число $a=\overline{a_n\ldots a_0}$ делится на 2 в том и только в том случае, когда на 2 делится число a_0 (т. е. цифра в разряде единиц).

Это значит, что число a делится на 2 в том и только в том случае, когда его десятичная запись оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8.

Аналогично из того, что 10 делится на 5, вытекает следующий признак делимости на 5:

число a делится на 5 в том и только в том случае, когда его десятичная запись оканчивается либо цифрой 5, либо цифрой 0.

Далее, число 100 делится на 4 и на 25. Отсюда вытекают следующие признаки делимости:

число a делится на 4, если на 4 делится двузначное число, составленное из цифр в разрядах десятков и единиц числа a.

Число a делится на 25, если на 25 делится число, составленное из цифр разрядов десятков и единиц числа a (т. е. если его десятичная запись оканчивается либо на 00, либо на 25, либо на 50, либо на 75).

Например, $3564\vdots 4$, $6075\vdots 25$ и т. д.

Предоставляем читателю сформулировать признаки делимости на 8 и на 125.

Докажем теперь следующий признак делимости, принадлежащий французскому ученому Блезу Паскалю (1623—1662).

Если остаток от деления 10^k на b равен r_k, где $k=0, 1, \ldots, n$, то остаток от деления числа $a=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$ на b совпадает с остатком от деления на b числа $a_n r_n+\ldots+a_1 r_1+a_0$ (в частности, если $a_n r_n+\ldots+a_1 r_1+a_0$ делится на b, то и число a делится на b).

В самом деле, так как остаток от деления числа 10^k на b равен r_k, то 10^k можно записать в виде $10^k=bq_k+r_k$. Поэтому имеем

$$a=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0=$$
$$=a_n(bq_n+r_n)+a_{n-1}(bq_{n-1}+r_{n-1})+\ldots+a_1(bq_1+r_1)+a_0=$$
$$=b(a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+\ldots+a_1q_1)+(a_nr_n+a_{n-1}r_{n-1}+\ldots+a_1r_1+a_0).$$

Слагаемое $b(a_nq_n+\ldots+a_1q_1)$ делится на b. Поэтому числа a и $a_nr_n+\ldots+a_1r_1+a_0$ имеют одинаковые остатки при делении на b.

Применим доказанное утверждение к выводу признаков делимости на 3 и на 9. Для этого заметим, что остатки при делении на 3 чисел 10, 100, 1000 и т. д. равны 1. Поэтому по признаку Паскаля получаем:

Число $a=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$ делится на 3 в том и только в том случае, когда на 3 делится сумма $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$ цифр десятичной записи этого числа.

Аналогично доказывается признак делимости на 9:

Для того чтобы натуральное число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы на 9 делилась сумма цифр десятичной записи этого числа.

Например, число 7128 делится на 9, так как на 9 делится число $7+1+2+8=18$. Число 5817 делится на 3, так как $5+8+1+7=21$, а число 21 делится на 3. Но на 9 число 5817 не делится, так как 21 не делится на 9.

Выведем еще признак делимости на 11. Для этого заметим, что по формуле (5) п. 14 § 2 главы II (формулы сокращенного умножения) имеем

$$10^{2n+1}+1=(10+1)(10^{2n}-10^{2n-1}+\ldots+1),$$

и поэтому число $10^{2n+1}+1$ делится на 11. Но тогда делится на 11 и число $10^{2n+1}-10$, а потому число 10^{2n+1} дает при делении на 11 остаток 10. Далее число $10^{2n}-1$ можно записать в виде

$$10^{2n}-1=(10^2)^n-1=(10^2-1)(10^{2(n-1)}+10^{2(n-2)}+\ldots+1).$$

Так как $10^2-1=99$, то $10^{2n}-1$ делится на 11. Но $10^{2n}=(10^{2n}-1)+1$, и потому 10^{2n} дает при делении на 11 остаток 1.

Применяя признак Паскаля, получаем следующий вывод:

Числа

$$a=a_{2n+1}\cdot 10^{2n+1}+a_{2n}\cdot 10^{2n}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0 \quad (1)$$

и

$$(10a_{2n+1}+a_{2n})+(10a_{2n-1}+a_{2n-2})+\ldots+(10a_1+a_0)$$

имеют один и тот же остаток при делении на 11.

Отсюда вытекает следующий признак делимости на 11:

Для того чтобы узнать, делится ли на 11 натуральное число, надо разбить десятичную запись этого числа справа налево на группы по две цифры (самая левая группа может содержать одну цифру) и сложить все получившиеся числа. Число делится на 11 в том и только в том случае, когда на 11 делится получившаяся сумма.

Пример 1.

Узнаем, делится ли на 11 число 237 849 568.

Решение. Разбиваем десятичную запись на группы по две цифры и складываем получившиеся числа: $68+95+84+37+2=286$. К получившемуся числу 286 применяем тот же прием: $86+2=88$. Так как 88 делится на 11, то и 286 делится на 11, а тогда и заданное число делится на 11.

Существует более простой признак делимости на 11. Чтобы вывести его, заметим, что $10=11-1$, а потому сумму (1) можно записать в виде

$$11(a_{2n+1}+a_{2n-1}+\ldots+a_1)+(-a_{2n+1}+a_{2n})+(-a_{2n-1}+a_{2n-2})+ \\ +\ldots+(-a_1+a_0).$$

Отсюда видно, что сумма (1) делится на 11 в том и только в том случае, когда делится на 11 выражение

$$-a_{2n+1}+a_{2n}-a_{2n-1}+a_{2n-2}-\ldots-a_1+a_0.$$

Значит, имеет место следующий признак делимости на 11:

Чтобы узнать, делится ли на 11 натуральное число a, надо сложить отдельно цифры его десятичной записи, стоящие на четных местах, и цифры, стоящие на нечетных местах, и из большей суммы вычесть меньшую. Если полученная разность делится на 11, то и число a делится на 11.

Пример 2.

Чтобы узнать, делится ли на 11 число 237 849 568, составляем сумму $2+7+4+5+8=26$ и $3+8+9+6=26$. Так как $26-26=0$ делится на 11, то и данное число делится на 11.

Чтобы получить признаки делимости на 7 и на 13, заметим, что $7\cdot 11\cdot 13=1001$. Но $1000=1001-1$, $1\,000\,000=1001\cdot 999+1$, $1\,000\,000\,000=1001\cdot 999\,001-1$ и т. д. Применяя рассуждения, аналогичные проведенным при выводе признака делимости Паскаля, получаем:

Чтобы узнать, делится ли натуральное число a на 7 или на 13, надо разбить его десятичную запись справа налево на группы по три цифры в каждой (самая левая группа может содержать две или одну цифру) и взять группы с нечетными номерами со знаком «минус», а с четными номерами со знаком «плюс». Если значение получившегося выражения делится на 7 (соответственно на 13), то и заданное число делится на 7 (соответственно на 13).

Пример 3.

Проверим, что число 459 348 965 866 делится на 7, но не делится на 13.

Решение. Образуем выражение

$$459 - 348 + 965 - 866.$$

Его значение равно 210. Так как 210 делится на 7, но не делится на 13, то и заданное число делится на 7, но не делится на 13.

УПРАЖНЕНИЯ

56. Сформулируйте и докажите признаки делимости:
а) на 50; б) на 8; в) на 125.

57. Среди следующих чисел найдите делящиеся на 11:
246 915 658, 371 846 205, 865 914 324 015.

58. Вместо звездочек поставьте цифры так, чтобы получилось число, делящееся:
а) на 5: 483*, 34*0, 5*31;
б) на 9: 179*, 54*7, 5*24;
в) на 3: 24*, 1*6, *22;
г) на 8: 257*4, 3*22, 435*5;
д) на 11: 471*6, 8*31, 121*.

59. Среди следующих чисел найдите делящееся и на 7, и на 13:

659 865 024, 251 311 805.

60. Пользуясь равенством $73 \cdot 137 = 10\,001$, докажите, что число $\overline{abcdabcd}$ делится и на 73, и на 137.

§ 2. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

6. ОСНОВНОЙ ЗАКОН АРИФМЕТИКИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Напомним определения простого и составного чисел.

Определение. Натуральное число p называется *простым*, если оно имеет два и только два делителя: единицу и само это число.

Число, имеющее более двух делителей, называется *составным*.

Из этих определений видно, что любое натуральное число, кроме 1, является либо простым, либо составным. Число 1 имеет только один делитель, а именно 1, и потому не относится ни к простым, ни к составным числам.

Основным законом арифметики натуральных чисел является следующее утверждение:

Теорема. Любое натуральное число, отличное от 1, может быть представлено в виде произведения простых чисел. Два разложения натурального числа на простые множители могут отличаться друг от друга лишь порядком множителей.*)

Мы разобьем доказательство этой теоремы на ряд этапов.

1) *Если простое число p делится на простое число q, то эти числа равны* ($p=q$).

В самом деле, так как p — простое число, то оно имеет лишь два делителя, а именно 1 и p. Но $p \vdots q$, значит, q равно либо 1, либо p. Поскольку $q \neq 1$, то $q=p$.

2) *Если p — простое число, то любое натуральное число либо делится на p, либо взаимно просто с p.*

В самом деле, пусть числа p и n не являются взаимно простыми. Тогда у них отличный от 1 общий делитель d. Но у простого числа p лишь два делителя: 1 и p. Поскольку $d \neq 1$, то $d=p$, и потому n делится на p.

3) *Произведение натуральных чисел a и b делится на простое число p в том и только в том случае, когда хотя бы одно из этих чисел делится на p.*

В самом деле, если a или b делится на p, то и ab делится на p. Обратно, пусть ab делится на p. Если при этом a не делится на p, то по утверждению 2) a и p взаимно просты. Но тогда по утверждению 3) п. 4 из делимости ab на p следует, что b делится на p.

Данное утверждение верно для произведения нескольких множителей — если такое произведение делится на простое число p, то хотя бы один из множителей делится на p. Проведите доказательство этого утверждения сами.

4) *Любое натуральное число, отличное от 1, является либо простым, либо произведением простых чисел.*

Предположим, что данное утверждение неверно. Тогда существовали бы натуральные числа, отличные от 1, не являющиеся ни простыми, ни произведениями простых чисел. Назовем такие числа «плохими». В совокупности «плохих» чисел есть наименьшее число, которое мы обозначим через m. Так как это число не является простым, оно имеет отличный от 1 и от m делитель k и потому может быть записано в виде $m=kq$. Но k и q — делители числа m, отличные от m, и потому они меньше, чем m. Поскольку m — наименьшее из «плохих» чисел, то ни k, ни q «плохими» быть не могут, а потому являются либо простыми числами, либо произведениями про-

*) Эта теорема отсутствует в знаменитых «Началах» Евклида. Впервые ее точная формулировка и доказательство приведены в книге «Арифметические исследования» великого немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777—1855), изданной в 1801 г.

стых чисел. В обоих случаях число $m=kq$ является произведением простых чисел, а потому не может быть «плохим» вопреки предположению. Мы пришли к противоречию с предположением о существовании «плохих» чисел. Значит, таких чисел не существует, а потому все натуральные числа, отличные от 1, являются либо простыми числами, либо произведениями простых чисел.

5) *Если натуральное число m делится на простое число p, то в любом разложении этого числа на простые множители хотя бы один из множителей равен p.*

В самом деле, пусть $m=p_1 \dots p_k$ — разложение m на простые множители. Так как $m \vdots p$, то по утверждению 3) хотя бы один из этих множителей делится на p. Пусть, например, $p_1 \vdots p$. Тогда по утверждению 1) выполняется равенство $p_1=p$. Утверждение доказано.

6) *Любые два разложения составного числа на простые множители отличаются друг от друга лишь порядком множителей.*

В самом деле, назовем число «плохим», если для него это утверждение неверно. Если бы существовало хотя бы одно такое число, то множество «плохих» чисел было бы не пусто, и потому в нем нашлось бы наименьшее число. Обозначим его буквой m. По предположению это число имеет два разложения на простые множители:

$$m=p_1 \dots p_k \text{ и } m=q_1 \dots q_s,$$

которые отличаются друг от друга не только порядком слагаемых (быть может, одно из этих разложений имеет множители, не входящие в другое разложение, а может быть, один простой множитель входит в одно из разложений два раза, а в другое пять раз и т. д.). Но число m делится на p_1, а потому по утверждению 5) в разложение $m=q_1 \cdot q_s$ этого числа на простые множители хотя бы один раз входит множитель p_1. Пусть, например, $q_1=p_1$. Тогда имеем

$$m=p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k=p_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s,$$

и потому $m : p_1=p_2 \cdot \dots \cdot p_k=q_2 \cdot \dots \cdot q_s$. Но $m : p_1 < m$ и, следовательно, не может быть «плохим» числом (напомним, что m — наименьшее из «плохих» чисел). Значит, разложения $p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ и $q_2 \cdot \dots \cdot q_s$ этого числа на простые множители могут отличаться друг от друга лишь порядком множителей. Но тогда и разложения числа m

$$m=p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \text{ и } m=p_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$$

отличаются друг от друга лишь порядком множителей, а это противоречит предположению. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно и «плохих» чисел не существует. Иными словами, для любого натурального числа, большего 1, разложения на простые множители могут отличаться друг от друга лишь порядком множителей.

Итак, из простых чисел с помощью умножения можно построить все натуральные числа. Этим и объясняется название простых чисел, являющихся, по выражению древних греков, *первоначальными* числами. Этим же объясняется то большое внимание, которое уде-

лили математики всех времен изучению простых чисел. Оказалось, что простые числа обладают рядом загадочных свойств.

Например, до сих пор неизвестен механизм расположения простых чисел в ряду натуральных чисел. Есть «близко» стоящие простые числа, отличающиеся друг от друга на 2. Например, 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19. Такие числа называют *простыми числами-близнецами*. И в то же время существуют сколь угодно большие промежутки ряда натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа. Например, множество {1000001!+2, 1000001!+3, 1000001!+4, ..., 1000001!+999999, 1000001!+1000000, 1000001!+1000001}*), содержащее миллион последовательных натуральных чисел, не содержит ни одного простого числа, так как первое число делится на 2, второе — на 3, третье — на 4 и т. д. Однако в п. 8 мы докажем, что простых чисел бесконечно много.

УПРАЖНЕНИЯ

61. Составьте таблицу простых чисел, меньших 200.

62. Какое четное число простое?

63. Найдите простые числа, лежащие между:

а) 2680 и 2710; в) 40 322 и 40 330;
б) 2300 и 2350; г) 3 628 802 и 3 628 810.

64. Какие из следующих высказываний истинны:

а) если произведение двух натуральных чисел делится на 5, то хотя бы один из множителей делится на 5;
б) если произведение двух натуральных чисел делится на 36, то хотя бы один из множителей делится на 36;
в) если ни одно из двух натуральных чисел не делится на 11, то их произведение не делится на 11;
г) если ни одно из двух натуральных чисел не делится на 36, то их произведение не делится на 36;
д) если произведение нескольких натуральных чисел делится на 12, то хотя бы один множитель делится на 3 и хотя бы один из множителей четный;
е) если произведение нескольких натуральных чисел делится на 12, то среди этих чисел есть четное число, делящееся на 3?

65. Докажите, что наименьшее натуральное число, взаимно простое с числами 2, 3, 4, ..., p, где p — простое число, является простым.

66. Докажите, что если n — составное число, то 2^n-1 тоже является составным числом.

67. Какие остатки может иметь при делении на 10 простое число, большее, чем 10?

---

*) $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$. Символ $n!$ читается «эн факториал».

68. Докажите, что если $a>1$, то a^4+4 — составное число.

69. Докажите, что если сумма и произведение двух чисел делятся на простое число p, то каждое из этих чисел делится на p.

70. Докажите, что для любого натурального n найдется натуральное x, такое, что число $nx+1$ — составное.

71. Известно, что числа p, $p+4$ и $p+14$ — простые. Чему равно p?

72. Известно, что числа p, $p+10$ и $p+14$ — простые. Чему равно p?

73. Известно, что числа p и $8p^2+1$ — простые. Чему равно p?

74. Известно, что числа p, $2p+1$, $4p+1$ — простые. Чему равно p?

75. Найдите простое число p, если известно, что $13p+1$ является точным кубом.

76. Докажите, что если $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m-1)+1$ делится на m, то m — простое число.

77*. Докажите, что если p — простое число, то многочлен $1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}$ нельзя представить в виде произведения многочленов меньших степеней с целыми неотрицательными коэффициентами.

78. Запишите разложение числа 1000 на простые множители. Сколько делителей имеет это число?

79. Сколько раз входит число 2 в разложение на простые множители произведения всех натуральных чисел от 1 до 10?

80. Сколькими нулями оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 10?

81. Найдите числа a и b, если:

а) $D(a;\ b)=7$, $ab=1470$; б) $a:b=9:7$, $K(a;\ b)=693$.

82. Сформулируйте и докажите признаки делимости:

а) на 6; б) на 12; в) на 18; г) на 50; д) на 33.

7. КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Чтобы избежать неоднозначности в записи разложения натурального числа n на простые множители, условились записывать эти множители в порядке возрастания. Например, разложение числа 180 на простые множители имеет вид $180=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5$, или, используя обозначение степени, $180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$. Такую запись разложения на простые множители называют **канонической**. В общем виде каноническое разложение натурального числа n имеет вид $n=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_1, p_2, ..., p_k — простые числа, такие, что $p_1<p_2<\ldots<p_k$, а α_1, α_2, ..., α_k — натуральные числа.

Знание канонических разложений чисел облегчает нахождение их наибольших общих делителей и наименьших общих кратных. А именно наибольший общий делитель двух натуральных чисел a и b равен произведению простых множителей, входящих в разложение и первого, и второго чисел, причем показатель степени каждого из таких простых чисел равен меньшему из показателей, с которыми это простое число входит в разложения a и b. Например, из того, что

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5, \text{ а } 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5,$$

следует, что

$$D(180;\ 240) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Наименьшее общее кратное чисел a и b равно произведению простых чисел, входящих в разложение хотя бы одного из чисел a и b; если простое число входит в разложения обоих чисел, то выбирается это число с наибольшим из показателей. Например,

$$K(180;\ 240) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720.$$

УПРАЖНЕНИЯ

83. Найдите ab, $D(a;\ b)$ и $K(a;\ b)$, если $a = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11$, $b = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7^2$. Делится ли a на b?

84. Докажите, что число $p^m q^n$, где p и q просты, причем $p \neq q$, имеет $(m+1)(n+1)$ делителей.

85*. Найдите, сколько делителей имеет число $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

86. Найдите каноническое разложение числа 1 858 560 на простые множители.

87*. Найдите необходимое и достаточное условие того, что число $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ является квадратом натурального числа.

88. Сформулируйте условие, при котором ab делится на cd, если известны канонические разложения чисел a, b, c, d.

89*. Докажите, что если p — простое число, а n — натуральное число, то $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ делится на p^k, где $k = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right]^{*)} + \ldots$, и не делится на p^{k+1}.

90*. Докажите, что если k — натуральное число, то

$$(k+1) \cdot \ldots \cdot (k+n-1)(k+n) \vdots 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

91. Делится ли $\dfrac{1000!}{500!500!}$ на 7?

92. Докажите, что число $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ целое и делится на $n+1$.

---

*) Через $[x]$ обозначена целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

8. СВОЙСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

В математике изучены многие свойства простых чисел. Рассмотрим некоторые из них.

1) **Среди простых чисел нет наибольшего** (иными словами, множество простых чисел бесконечно).

Докажем это утверждение методом от противного, повторяя рассуждения Евклида, приведенные им в IX книге «Начал». Евклид рассуждал так: предположим, что существует лишь конечное множество простых чисел $p_1, \ldots, p_k$, а все остальные натуральные числа (кроме 1) являются составными. Образуем число $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. Это число больше, чем любое из чисел $p_1, \ldots, p_k$, а потому по предположению должно быть составным. Но тогда оно имеет хотя бы один простой множитель. Этим множителем не может быть ни одно из чисел $p_1, \ldots, p_k$, так как при делении n на эти числа каждый раз получается в остатке 1. Так как по предположению иных простых чисел, кроме $p_1, \ldots, p_k$, не существует, мы пришли к противоречию. Это противоречие показывает, что сделанное нами предположение неверно и потому наибольшего простого числа не существует.

2) **Если n — составное натуральное число, то среди его простых делителей есть хотя бы один делитель p, такой, что $p^2 \leqslant n$.**

В самом деле, пусть p — наименьший простой делитель числа n. Тогда $n = pm$, причем среди простых делителей числа m нет меньших, чем p, и потому $m \geqslant p$. Но тогда $n \geqslant p^2$, что и требовалось доказать.

Это свойство можно успешно использовать при разложении числа n на множители или при проверке его на простоту. Достаточно ограничиться проверкой делимости числа n на простые делители p, для которых $p^2 \leqslant n$.

Пример 1.

Проверим, будет ли число 91 составным.

Решение. Так как $7^2 < 91 < 11^2$, то достаточно проверить делимость числа 91 на простые числа 2, 3, 5, 7. Находим, что $91 = 7 \cdot 13$, т. е. число 91 составное.

Считают, что этот метод определения простоты чисел впервые опубликовал в 1202 г. Леонардо Пизанский (1180—1240), более известный под именем Фибоначчи, т. е. сын Боначчи.

Некоторые утверждения о простых числах до сих пор не доказаны, хотя по своей формулировке доступны школьникам 6 класса. Так, в 1742 г. петербургский академик Христиан Гольдбах высказал предположение, что каждое четное число можно выразить в виде суммы двух простых чисел (в то время число 1 относили к простым). Например, 4=1+3, 14=7+7 и т. д. Это предположение с помощью ЭВМ проверено для очень больших четных чисел. В 1937 г. советский математик академик Иван Матвеевич Виноградов доказал, что любое достаточно большое нечетное число можно представить в ви-

де суммы трех простых нечетных чисел. Число, начиная с которого доказана справедливость этого утверждения, громадно, и проверить все нечетные числа, меньшие этого числа, невозможно даже при использовании самых быстродействующих вычислительных машин. Из теоремы Виноградова следует, что достаточно большие четные числа можно представить в виде суммы четырех простых чисел.

Другой советский математик — член-корреспондент Академии наук СССР Лев Генрихович Шнирельман доказал, что все натуральные числа можно представить в виде суммы достаточно большого количества простых чисел. Сейчас доказано, что для этого достаточно двадцати простых слагаемых.

Есть еще и такое предположение: любое четное число можно представить в виде разности двух простых чисел (например, $14=127-113$, $20=907-887$ и т. д.), но оно тоже до сих пор не доказано.

В теории целых чисел есть предположения, для которых математики искали доказательство не одно столетие.

Так, еще в XVII в. юрист из Тулузы Пьер Ферма (1601—1665), ставший одним из крупнейших математиков Франции, высказал в предположительной форме, без строгих доказательств, ряд предложений, относящихся к теории чисел. Например, известная «великая теорема Ферма», состоящая в требовании найти целые числа x, y, z, для которых выполняется равенство

$$x^n+y^n=z^n$$

для какого-нибудь натурального $n\geqslant 3$, или доказать, что такое равенство невозможно, до конца XX столетия не имела полного доказательства. Только недавно (1993—1995) американским математиком Андрэ Вайлсом было получено строгое доказательство гипотезы Ферма, хотя для $n=3$ и $n=4$ невозможность такого равенства доказана знаменитым математиком Леонардом Эйлером (1707—1783) еще в XVIII в. Заметим, что им же получено доказательство так называемой «малой теоремы Ферма»: если p — простое число и n не делится на p, то число $n^{p-1}-1$ всегда делится на p.

УПРАЖНЕНИЯ

93. Какие из чисел $2\cdot 3+1$, $2\cdot 3\cdot 5+1$, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+1$, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11+1$, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+1$ являются простыми, а какие — составными?

94. Сколькими способами можно разложить число 360 в произведение двух взаимно простых множителей? 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 2.

95*. Сколькими способами можно разложить число, имеющее каноническое разложение $m=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot p_4^{\alpha_4}$, в произведение двух взаимно простых множителей?

96. Исследуется вопрос, является ли простым число 1093. Уже проверено, что оно не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Стоит ли продолжать проверку?

97. Докажите, что имеется бесконечно много простых чисел, имеющих вид:

а) $3n+2$; б) $4n+3$; в) $6n+5$.

98. Проверьте, каждое ли четное число от 2 до 100 является либо суммой двух простых чисел, либо суммой простого числа и единицы.

99. Проверьте, все ли четные числа от 2 до 200 являются разностями двух простых чисел.

9*. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Мы знаем, что одно уравнение с двумя неизвестными имеет, вообще говоря, бесконечно много решений. Обычно такое уравнение называют *неопределенным*. Так, уравнение вида $ax+by=c$ называют *неопределенным уравнением первой степени с двумя неизвестными*. Но иногда встречаются задачи, в которых на неизвестные налагаются дополнительные условия. Например, эти неизвестные должны быть натуральными числами или в крайнем случае нулями.

Задача.

Найдем все способы уплаты 47 р., считая, что в обращении находятся только пяти- и трехрублевые купюры.

Решение. Обозначим число пятирублевых купюр через x, а число трехрублевых — через y. Тогда задача сводится к следующему: найти все натуральные или нулевые решения уравнения $5x+3y=47$. Ясно, что x не может равняться нулю, так как 47 не делится на 3. Но при $x=1$ получаем для y уравнение $5+3y=47$, имеющее натуральное решение $y=14$.

Итак, мы нашли одно решение заданного уравнения в натуральных числах: $x=1$, $y=14$. Чтобы найти другие решения, заметим, что при увеличении x на 3 и одновременном уменьшении y на 5 значение выражения $5x+3y$ не изменяется. Поэтому из решения (1; 14) находим решения (4; 9), затем (7; 4). Дальнейшее продвижение невозможно, так как при уменьшении 4 на 5 получится отрицательное число -1. Итак, наша задача имеет три и только три решения: 1 купюра в 5 р. и 14 трехрублевых купюр; 4 пятирублевых и 9 трехрублевых купюр; 7 пятирублевых и 4 трехрублевые купюры.

Если пятирублевые и трехрублевые купюры есть не только у того, кто платит, но и у кассира, то x и y могут принимать не только положительные, но и отрицательные значения (что соответствует сдаче), и мы получаем бесконечно много решений, имеющих вид: $x=1+3t$, $y=14-5t$, где t принимает все целые значения. Как мы видели выше, натуральным значениям x и y соответствуют лишь значения t, равные 0, 1 и 2.

Рассмотрим теперь общую задачу: пусть a, b и c — целые числа. Найдем все пары целых чисел $(x; y)$, для которых выполняется равенство $ax+by=c$. Как говорят, *решим неопределенное уравнение* $ax+by=c$ *в целых числах*. Заметим, что в алгебре неопределенные уравнения, в которых неизвестные могут быть только целыми числами, называют *диофантовыми* по имени математика Диофанта, жившего в III в. н. э.

Выясним теперь, при каком условии диофантово уравнение первой степени с двумя неизвестными имеет решение. Пусть $d=D(a; b)$. Тогда при любых целых значениях x и y выражение $ax+by$ делится на d, поскольку a и b делятся на d. Значит, чтобы уравнение $ax+by=c$ решалось в целых числах, необходимо, чтобы c делилось на $D(a; b)$.

Например, уравнение $35x-20y=14$ не имеет решений в целых (а тем более в натуральных) числах. В самом деле, $D(35; 20)=5$, а 14 на 5 не делится.

Полученное условие является не только необходимым, но и достаточным. Иными словами, верно следующее утверждение:

Если целое число c делится на $D(a; b)$, то уравнение $ax+by=c$ имеет целые решения*).

Покажем, как искать эти решения, на примере решения уравнения $28x-40y=60$.

Это уравнение имеет целые решения, так как $D(28; 40)=4$, а число 60 делится на 4. Ясно, что любое целое решение уравнения $28x-40y=60$ удовлетворяет и уравнению $7x-10y=15$, получаемому из заданного сокращением обеих частей на 4. Обратно: любое целое решение уравнения $7x-10y=15$ является и целым решением заданного уравнения.

У получившегося после сокращения на 4 уравнения $7x-10y=15$ коэффициенты при неизвестных взаимно просты, т. е. $D(7; 10)=1$. Применим к этим коэффициентам алгоритм Евклида:

$$
\begin{array}{r|l}
10 & 7 \\
\cline{2-2}
7 & 1 \\
\cline{2-2}
7 & 3 \\
\cline{2-2}
6 & 2 \\
\cline{2-2}
3 & 1 \\
\cline{2-2}
3 & 3 \\
\cline{2-2}
0 &
\end{array}
$$

Мы видим, что при делении числа 7 на 3 получилось неполное частное 2 и остаток 1, а потому $7=2\cdot 3+1$. Значит, $1=7-2\cdot 3$. Таким же путем устанавливаем, что $10=1\cdot 7+3$, а потому $3=10-1\cdot 7$. Подставляя это выражение для 3 в равенство $1=7-2\cdot 3$, получаем $1=7-2(10-1\cdot 7)$. Раскрывая скобки, имеем $1=7\cdot 3-10\cdot 2$. Это означает, что числа $x=3$ и $y=2$ дают целое решение уравнения

*) Если некоторые из чисел a, b, c отрицательны, то вместо них берем их модули.

$7x-10y=1$. Чтобы получить целое решение уравнения $7x-10y=15$ надо оба эти числа умножить на 15. Таким путем мы получили одно целое решение уравнения $7x-10y=15$ (тем самым и заданного уравнения): $x=45$, $y=30$. Другие целые решения того же уравнения имеют вид: $x=45+10t$, $y=30+7t$, где t — любое целое число.

Чтобы выделить целые неотрицательные решения заданного уравнения, надо найти такие значения t, при которых $45+10t\geqslant 0$ и $30+7t\geqslant 0$. Из этих неравенств находим, что должны выполняться условия

$$t\geqslant -4{,}5 \text{ и } t\geqslant -\frac{30}{7}=-4\frac{2}{7},$$

из которых вытекает, что $t\geqslant -4$. Итак, данное уравнение имеет бесконечно много целых неотрицательных решений, задаваемых формулами

$$x=45+10t,\ y=30+7t,$$

где t принимает значения, равные -4, -3, -2, ...

УПРАЖНЕНИЯ

100. Решите в целых числах уравнение:

а) $8x+14y=32$; г) $11x-3y=14$; ж) $19x-5y=119$;

б) $6x-15y=27$; д) $7x-4y=29$; з) $17x-49y=-8$.

в) $-3x-5y=16$; е) $9x-11y=8$;

101. Найдите целые неотрицательные решения уравнения:

а) $8x+65y=81$; г) $17x+23y=183$;

б) $19x+5y=119$; д) $7x+10y=297$;

в) $3x+7y=250$; е) $13x+19y=1170$.

102. Укажите все способы уплаты 4800 р., используя банкноты в 200 и 500 р. Возможно ли уплатить эту сумму банкнотами в 500 и 1000 р.?

103. Найдите общий вид целых неотрицательных чисел, дающих при делении на 7 остаток 3, а при делении на 11 остаток 4.

104. Разделите 200 на два слагаемых так, чтобы при делении одного на 6, а другого на 11 получились соответственно остатки 5 и 4.

105. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 28 дает в остатке 21, а при делении на 19 дает в остатке 17.

10*. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Наряду с десятичной системой обозначения чисел, которой мы обычно пользуемся, применяются иные формы записи натуральных чисел.

Докажем следующее утверждение:

Теорема. Пусть $p>1$ — натуральное число. Тогда для любого натурального числа n найдутся такие числа n_0, n_1, ..., n_s, что

1) имеет место равенство

$$n=n_0+n_1p+n_2p^2+\ldots+n_sp^s; \qquad (1)$$

2) числа n_0, n_1, ..., n_s принимают лишь значения 0, 1, ..., $p-1$, причем $n_s\neq 0$.

Доказательство. Запись требуемого вида есть у числа 1 (для него $n_0=1$, а остальные n_s отсутствуют). Если бы существовало число, не имеющее требуемой записи, то среди таких чисел было бы наименьшее число k, причем оно отлично от 1, а потому $k-1$ является натуральным числом. Так как $k-1<k$, то $k-1$ должно иметь запись требуемого вида:

$$k-1=k_0+k_1p+\ldots+k_sp^s. \qquad (2)$$

Но тогда

$$k=(k_0+1)+k_1p+\ldots+k_sp^s.$$

Возможны два случая:

а) $k_0+1<p$, и тогда запись для числа k получается из записи (2) заменой k_0 на k_0+1;

б) $k_0+1=p$, тогда $k_0+1+k_1p=(k_1+1)p$, и потому для получения записи числа k надо заменить в (2) k_0 на 0, а k_1 на k_1+1. Если при этом $k_1+1<p$, то запись для k получена, а если $k_1+1=p$, то надо заменить k_1+1 на 0, а k_2 на k_2+1. Продолжая этот процесс, получим через несколько шагов запись для k, что противоречит предположению о невозможности такой записи. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, т. е. все натуральные числа можно записать требуемым образом.

Докажем теперь, что натуральное число n имеет лишь одну запись в виде (1). Но из равенства (1) следует, что остаток от деления n на p равен n_0, а потому n_0 однозначно определено. Далее, имеем $\frac{n-n_0}{p}=n_1+n_2p+\ldots+n_sp^{s-1}$, а потому однозначно определено n_1 как остаток при делении $\frac{n-n_0}{p}$ на p. Последовательно убеждаемся, что все числа n_0, n_1, ..., n_s в записи (1) определены однозначно.

Запись (1) кратко выражают так:

$$n=\overline{n_sn_{s-1}\ldots n_0}_p$$

Число p называют **основанием** данной системы записи натуральных чисел (или, как еще говорят, **системы счисления**), а саму систему счисления называют *p-ичной*.

Из проведенного выше доказательства единственности p-ичной записи чисел следует метод нахождения этой записи: делим число n на p и находим остаток от деления n_0 и неполное частное $q_1 = \frac{n - n_0}{p}$. Далее делим это неполное частное на p и находим остаток n_1. Продолжая процесс деления с остатком, находим одну за другой цифры p-ичной записи числа n.

Пример 1.

Запишем число 147 в пятеричной системе счисления.

Решение. Имеем

$$\begin{array}{r|l} 147 & 5 \\ \underline{2} & 29 \\ & \underline{4} \\ & 5 \\ & \underline{0} \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} & 5 \\ & 5 \\ & 5 \\ & 1 \\ & 0 \end{array}$$

Значит, $147 = 1042_5$.

Пример 2.

Найдем десятичную запись числа 5401_7.

Решение. Имеем $5401_7 = 5 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 1 = 1912$.

Отметим, что для записи чисел в p-ичной системе счисления нужно p цифр для обозначения чисел 0, 1, 2, ..., $p-1$. Например, в двоичной системе счисления нужны лишь две цифры 0 и 1, в троичной — цифры 0, 1 и 2. Если $p > 10$, то нужны новые знаки для обозначения чисел, которые в десятеричной*) системе счисления обозначают так: 10, 11 и т. д. до $p-1$ включительно. Например, в шестнадцатеричной системе счисления, используемой в некоторых системах ЭВМ, кроме обычных цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, нужны еще шесть цифр, например такие:

$$\text{⌋} = 10,\ \text{⌊} = 11,\ \text{⊏} = 12,\ \text{⌜} = 13,\ \text{E} = 14,\ \text{⌝} = 15.$$

В ЭВМ используется обычно двоичная система счисления. Однако в этой системе счисления записи чисел становятся слишком громоздкими (содержат слишком много цифр), и потому обычно переводят числа из десятеричной записи в восьмеричную, а потом пользуются следующей таблицей для перевода из восьмеричной системы счисления в двоичную:

В восьмеричной	0	1	2	3	4	5	6	7
В двоичной	000	001	010	011	100	101	110	111

*) Употребляется также название «десятичная» система счисления.

Пример 3.

Переведем число 2134 в двоичную систему счисления.

Решение. Сначала с помощью деления с остатком на 8 находим восьмеричную запись числа:

$$\begin{array}{r|l} 2134 & 8 \\ \hline 6 & 266 \\ \hline 2 & 33 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 4 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 8 & \\ \hline 8 & \\ \hline 8 & \\ \hline 8 & \\ \hline & \end{array}$$

Следовательно, $2134 = 4126_8$. А теперь с помощью таблицы находим двоичную запись этого числа: $2134 = 100001010110_2$.

Арифметические операции над числами в p-ичной записи выполняются по тем же алгоритмам, что и в десятеричной, меняются лишь таблицы сложения и умножения. Приведем эти таблицы для двоичной и троичной систем счисления:

а) $p = 2$

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

б) $p = 3$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

В настоящее время десятичная система стала общепринятой во всем мире. Великий ученый Д. И. Менделеев сказал: «Число, выраженное десятичным знаком, прочтет и немец, и русский, и араб, и янки одинаково». Но в глубокой древности у многих народов складывались свои традиции записи чисел и действий с ними. Например, в древнем Вавилоне применялась шестидесятеричная система счисления. Ее остатки мы находим в единицах измерения времени: 1 час — 60 минут, 1 минута — 60 секунд.

На Ближнем Востоке была распространена двенадцатеричная система. Остатки этой системы сохранились до наших дней. Хорошо известно название для числа «двенадцать», т. е. для единицы второго разряда в двенадцатеричной системе,— *дюжина*. До сих пор сохранился обычай считать столовые приборы, стулья в мебельном гарнитуре не десятками, а дюжинами. У ряда африканских племен и в Древнем Китае употреблялась пятеричная система счисления. В Центральной Америке и у древних кельтов была распространена двадцатеричная система.

Перечисленные выше примеры систем счисления входят в большую группу **позиционных** систем счисления. Кроме них, существует группа **непозиционных** систем счисления. Хорошо известным примером непозиционной системы счисления является *римская система*. В этой системе роль цифр играют буквы латинского алфавита: буква I — единица, буква V — пять, буква X — десять, буква L — пятьдесят, C — сто, D — пятьсот, M — тысяча.

Неверно было бы думать, что в настоящее время используют только десятичную систему счисления. В современном мире особое место занимают еще две позиционные системы счисления — двоичная и восьмеричная. Особенно многочисленны применения двоичной системы, использующей всего две цифры — 0 и 1. Она оказалась наиболее удобной при конструировании электронных вычислительных машин и устройств кодирования. Дело в том, что наиболее надежные и миниатюрные элементы, запоминающие и перерабатывающие информацию, имеют два устойчивых состояния, которым соответствуют цифры 0 и 1.

Всем, кто имеет дело с ЭВМ, известна единица количества информации (памяти ЭВМ) — *бит* (от английских слов binary digit — двоичная цифра). Восемь бит составляют более крупную единицу — *байт*. Память ЭВМ измеряют обычно в *килобайтах* (1 килобайт — 2^{10} байт) и *мегабайтах* (1 мегабайт — 2^{20} байт).

УПРАЖНЕНИЯ

106. Верно ли записаны в семеричной системе числа: 2360_7, 35721_7, 608512_7? Если нет, то почему?

107. Запишите первые 38 натуральных чисел в девятеричной, двенадцатеричной и шестнадцатеричной системах счисления.

108. Проверьте, верны ли равенства:

а) $47056_8 = 100111000101110_2$; б) $101001100011101_2 = 51465_8$.

109. Запишите числа 70532_8 и 160346_8 в двоичной системе счисления.

110. Запишите числа 101011001111100_2 и 111010100001101_2 в восьмеричной системе счисления.

111. Число 101110110011100_2 запишите в шестнадцатеричной системе счисления.

112. Выполните действия в соответствующих системах счисления, после чего переведите числа в десятеричную систему счисления, выполните действия в этой системе и сравните результаты:

а) $(1001101_2+1110001_2)\cdot(1110001_2-1001111_2)$;
б) $212012_3\cdot 201_3+22020_3\cdot 111_3$;
в) $767_8\cdot 34_8-2055_8$;
г) $4\text{ Ⅎ }5_{13}-2\text{ ⊏ }8_{13}$.

113. Осуществите переход:

а) $37051_8=x_6$; б) $42031_5=x_7$; в) $890721=x_8$; г) $45261_7=x_{10}$.

114. В каких системах счисления возможны равенства:

а) $15+16=33$, $314+45=403$;
б) $236-145=61$, $263-214=46$;
в) $5\cdot 7=38$, $13\cdot 5=63$, $66:9=8$, $347:12=283$?

115. Составьте таблицы сложения и умножения в восьмеричной, двенадцатеричной и четверичной системах счисления.

116. Выполните следующие операции:

а) 1543_6+42_6;
б) $65104_8+70645_8+130_8$;
в) $7484_{14}+5769_{14}$;
г) $43\text{ Ⅎ }5_{16}+3\text{ L }6_{16}-4\text{ E }25_{16}$;
д) $10101011_2-110111_2$;
е) 2304_6-405_6;
ж) $783041_9-87605_9$;
з) $46\text{ ⊏ }37_{13}-738\text{ L }_{13}$;
и) $1011111_2\cdot 101_2$;
к) $4203_8\cdot 37_8$;
л) $32\text{ L }_{16}\cdot 13\text{ ⅂ }_{16}$;
м) $111100011_2:10101_2$;
н) $1141113_5:143_5$.

117. Число 59 записывается в пятеричной системе счисления как 214_5. Как записываются в той же системе счисления числа $59\cdot 25$ и $59\cdot 125$?

118. Найдите двузначное число, которое в системах счисления с основаниями 4 и 10 записывается теми же цифрами, но в обратном порядке.

11*. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

При решении многих задач о натуральных числах оказывается полезным следующее утверждение, которое впервые явно сформулировано немецким математиком Леженом Дирихле (1805—1859), поэтому названо его именем.

Принцип Дирихле. **Если a и b — натуральные числа, причем $a>b$, то при раскладке a предметов в b ящиков хотя бы в одном из ящиков окажется не менее двух предметов.**

Справедливость этого принципа очевидна — если бы в каждом ящике было не более одного предмета, то количество предметов оказалось бы не больше числа ящиков вопреки предположению.

Несмотря на такую простоту принципа, с его помощью удается доказать довольно сложные утверждения (надо только удачно выбирать «ящики» и распределение «предметов» по этим ящикам).

Докажем сначала, что среди 9 млн жителей Москвы найдутся два человека, имеющие одинаковое число волос на голове (считаем, что у человека не более 400 тыс. волос на голове). В самом деле, разобьем всех жителей Москвы на группы, соединив вместе жителей, имеющих одинаковое число волос на голове. Так как по условию число групп не превышает 400 тыс., а жителей 9 млн, то хотя бы в одной группе («ящике») окажется не менее двух жителей, т. е. найдутся два человека, имеющие поровну волос на голове.

Приведем теперь математические примеры.

Пример.

Докажем, что из любых 101 натурального числа можно выбрать два таких числа, что их разность делится на 100.

Решение. Разложим наши числа по «ящикам», поместив в один «ящик» числа с одинаковыми последними двумя цифрами. Так как последних пар цифр 100 (00, 01, ..., 99), а чисел 101, то хотя бы в один «ящик» попадут два из наших 101 числа. Но тогда у них будут одинаковые последние две цифры, и потому их разность делится на 100.

УПРАЖНЕНИЯ

119. В Москве 9 млн жителей, на голове у каждого не более 400 тыс. волос. Докажите, что найдется 18 москвичей с одинаковым количеством волос на голове.

120. Докажите, что из 73 различных натуральных чисел можно найти два, разность которых делится на 72.

121. Докажите, что из 100 натуральных чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 100.

122. Докажите, что из 52 разных натуральных чисел можно выбрать два таких, что либо их сумма, либо их разность делится на 100.

123. Докажите, что для любого натурального числа n найдется делящееся на n число, в десятичной записи которого участвуют только нуль и единица.

124*. Докажите, что есть степень числа 29, оканчивающаяся цифрами 00001.

125. Докажите, что для любого натурального числа найдется делящееся на него число вида 111...1100...0.

126. Докажите, что для любого стозначного числа n найдется число, делящееся на 1963, последние сто цифр которого составляют число n.

127. Докажите, что из 1000 натуральных чисел можно выбрать несколько так, что их сумма делится на 1000.

128. Можно ли найти степень числа 3, оканчивающуюся цифрами 0001?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

129. Допишите к 523 три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

130. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат. Найдите все такие числа.

131. Найдите остаток от деления многочлена $x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x$ на $x-1$.

132. Из чисел 1, 2, 3, ..., 200 выбрано 101 число. Докажите, что среди этих чисел есть пара взаимно простых чисел.

133. Имеется 555 гирь массой 1 г, 2 г, 3 г, ..., 555 г. Разложите их на три равные по массе кучи.

134. Докажите, что многочлен $x^{12}-x^9+x^4-x+1$ при всех значениях x положителен.

135. Имеется кусок цепи из 60 звеньев, каждое массой 1 г. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы из получившихся частей можно было образовать все массы в 1 г, 2 г, 3 г, ..., 60 г (раскованное звено тоже имеет массу в 1 г)?

136. Докажите, что сумма $1^3+2^3+\ldots+n^3$ при любом n является квадратом натурального числа.

137. Докажите тождество:

а) $(ax+by+cz)^2+(bx+cy+az)^2+(cx+ay+bz)^2=$
$=(cx+by+az)^2+(bx+ay+cz)^2+(ax+cy+bz)^2$;

б) $(ax+by+cz+du)^2+(bx+cy+dz+au)^2+$
$+(cx+dy+az+bu)^2+(dx+ay+bz+cu)^2=$
$=(dx+cy+bz+au)^2+(cx+by+az+du)^2+$
$+(bx+ay+dz+cu)^2+(ax+dy+cz+bu)^2$.

138. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 1-x_1x_2=0, \\ 1-x_2x_3=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1-x_{14}x_{15}=0, \\ 1-x_{15}x_1=0. \end{cases}$$

139. Докажите, что при любом натуральном n число $n^2+8n+15$ не делится на $n+4$.

140. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b имеем

$$D(a+b;\ K(a;\ b))=D(a;\ b).$$

141. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5=1, \\ x_1+3x_2+4x_3+4x_4+4x_5=2, \\ x_1+3x_2+5x_3+6x_4+6x_5=3, \\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+8x_5=4, \\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=5. \end{cases}$$

142. Поставьте вместо звездочек такие цифры, чтобы число 30*0*03 делилось на 13.

143. В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов. Никакие два из них не набрали поровну очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько набрали вместе шахматисты, занявшие 5, 6, 7 и 8-е места. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 3-е и 5-е места?

144. Найдите наибольший общий делитель чисел 11111111 и 1111...111 (сто цифр, равных 1).

145. Среди чисел, все цифры которых единицы, найдите наименьшее число, делящееся на 333...33 (100 троек).

146. Если некоторое четырехзначное число умножить на число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то получится восьмизначное число, у которого последние три цифры — нули. Найдите все такие числа.

147. Докажите, что последние цифры чисел

$$\frac{1\cdot 2}{2}, \frac{2\cdot 3}{2}, \frac{3\cdot 4}{2}, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}, \ldots$$

периодически повторяются.

148. В каком двузначном числе удвоенная сумма цифр равна их произведению?

149. Ученик «незаконно» сократил показатели степени, но получил правильный ответ:

$$\frac{43^3+17^3}{43^3+26^3}=\frac{43+17}{43+26}=\frac{60}{69}=\frac{20}{23}.$$

Объясните, почему так получилось. Придумайте еще примеры, когда такое «незаконное» сокращение приводит к правильному ответу.

150. Найдите все целые значения a, при которых значение дроби $\frac{a^3+1}{a-1}$ является целым числом.

151. Найдите все двузначные числа, квадрат которых равен кубу суммы их цифр.

152. Расстояние между деревнями A и B по шоссе равно 3 км. В деревне A — 100 школьников, а в деревне B — 50 школьников. На каком расстоянии от деревни A надо построить школу, чтобы общее расстояние, которое придется пройти всем 150 школьникам, было наименьшим?

153. В гостиницу приехал человек, не имеющий денег, но обладающий серебряной цепочкой из 6 звеньев. За каждый день он платил одним звеном цепочки. Хозяин гостиницы согласился принять лишь одно распиленное звено цепочки. Может ли этот человек прожить в гостинице 6 дней, уплачивая за каждый день проживания? Какое наименьшее число звеньев пришлось бы распилить, если бы человек жил в гостинице 100 дней, а в цепочке было бы 100 звеньев?

154. В одном стакане 5 ложек чая, а в другом — 5 ложек молока. Ложку молока перелили из второго стакана в первый, затем тщательно перемешали и ложку чая с молоком перелили обратно во второй стакан. Чего оказалось больше — чая в молоке или молока в чае? Как изменится ответ, если размешивали не очень тщательно? если переливали не 2, а 8 раз?

155*. В шести секторах круга расставлено 6 шашек, по одной шашке в каждом секторе. Одним ходом разрешается передвинуть две шашки в соседние секторы, но при этом одну шашку по часовой стрелке, а другую — против часовой стрелки. Можно ли собрать все шашки в одном секторе? Решите ту же задачу, когда 20 шашек расставлены в 20 секторах.

156. Можно ли нумизмату разменять 25 р., имея денежные купюры достоинством в 1, 3 и 5 р., так, чтобы получилось ровно 10 денежных купюр?

157. Сумма цифр числа не меняется при умножении этого числа на 5. Докажите, что это число делится на 9.

158. В какой системе счисления $75:7$?

159. Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что

$$m^2+1994=n^2?$$

160. Определите наибольшее значение отношения трехзначного числа к сумме его цифр.

161. Найдите все целые числа, на которые можно сократить дробь $\frac{5b+6}{8b+7}$ при целых значениях b.

162. Докажите, что если $n>2$, то $(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n)^2>n^n$.

163. На какое целое число надо умножить 999999999, чтобы получилось число, состоящее только из одних единиц?

164. Дано n чисел $x_1, \ldots, x_n$, каждое из которых равно либо 1, либо -1. Докажите, что если $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$, то n делится на 4.

165. Укажите все денежные суммы, выраженные целым числом рублей, которые могут быть представлены как четным, так и нечетным числом денежных банкнотов.

Примечание. Считайте, что в обращении находятся банкноты достоинством в 1, 3, 5, 10, 25, 50 и 100 р.

166. Имеется трехзначное число $\overline{abc}$, возьмем число $\overline{cba}$ и вычтем и большего меньшее. С получившейся разностью сделаем то же с мое (приписав 0 или 00, если разность не трехзначная). Докажи те, что через несколько аналогичных шагов мы получим либо чи ло 0, либо число 495.

167. Докажите, что среди 39 последовательных натуральных чисе найдется такое, что сумма его цифр делится на 11.

168. Докажите, что число $\underbrace{1000\ldots0001}_{1991\text{ нуль}}$ составное.

169. Докажите, что сумма цифр числа, являющегося точным квадр том, не может равняться пяти.

170. Исходя из равенства $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, выведите признаки делим сти на 7, 11, 13.

171. Исходя из того, что $27 \cdot 37 = 999$, выведите признак делимости н 37.

172. Можно ли разбить числа 1, 2, 3, ..., 32, 33 на 11 групп по тр числа так, чтобы в каждой группе одно число равнялось сумм двух других?

173. Даны 12 последовательных натуральных чисел. Докажите, что хо тя бы одно из них меньше суммы своих делителей, отличных о 1, и самого числа.

174. Из некоторого четырехзначного числа вычитают число, состоящ из тех же цифр, но расположенных в обратном порядке. Може ли при этом получиться число 1008?

175. Существует ли такое натуральное число n, что сумма цифр чи ла n^2 равна 100?

176. Найдите все пары натуральных чисел $(x; y)$, такие, что

$$3 \cdot 2^x + 1 = y^2.$$

177. Найдите наименьшее натуральное число, начинающееся с циф ры 4 и уменьшающееся в четыре раза при перестановке этой ци фры в конец записи числа.

178. Назовем шестизначное число счастливым, если сумма его цифр де лится на 7. Могут ли два соседних шестизначных числа быт счастливыми? Найдите все такие пары.

179. Найдите все значения x и y, для которых

$$xy + 1 = x + y.$$

180. Каких чисел больше среди первых 10^{10} натуральных чисел: таких в записи которых есть единица, или таких, в записи которых е нет?

181. Докажите, что уравнение $15x^2 - 7y^2 = 9$ не решается в целы числах.

182. Докажите, что если $a + \frac{1}{a}$ — целое число, то $a^n + \frac{1}{a^n}$ тоже являетс целым числом.

183. Можно ли каждый из 77 телефонов соединить ровно с 15 другими?

184. Докажите, что любое целое число, большее 7, можно представить в виде суммы неотрицательных чисел, кратных 3 и 5.

185*. Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ принимает при $x=0$ и $x=1$ нечетные значения, то уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ не имеет целых корней.

186. В клетках таблицы с 7 строками и 7 столбцами записаны числа от 1 до 49:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
43	44	45	46	47	48	49

Выбирают одно число и вычеркивают строку и столбец, в которых оно стоит. Затем выбирают еще одно число и т. д. Найдите сумму всех выбранных чисел.

187. В клетках таблицы с 7 строками и 7 столбцами стоят числа +1 и −1. Берутся произведения чисел, стоящих в каждом столбце и каждой строке. Докажите, что сумма этих 14 произведений не может равняться нулю.

188. Найдите все двузначные числа, которые делятся на произведение своих цифр.

189. Одна из цифр многозначного числа 0. При вычеркивании этого нуля число уменьшается в 9 раз.
а) На каком месте стоит этот нуль?
б) Найдите все числа, удовлетворяющие условию задачи.

190. Найдите все целые l, при которых дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$ сократима.

191. Докажите, что у числа, являющегося точным квадратом, произведение двух последних цифр четно.

192. Найдите все возможные значения для $D(a+b;\ a-b)$, если a и b — взаимно простые числа.

193. Найдите такие 12 натуральных чисел, что их сумма равна их произведению. Укажите все решения.

194. Найдите четырехзначное число, если его цифры — последовательно идущие числа, а после перестановки первых двух цифр получается точный квадрат.

195. 12 человек несут 12 хлебов. Каждый мужчина несет 2 хлеба, каждая женщина — $\frac{1}{2}$ хлеба, а ребенок — по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

196. Студент за 5 лет учебы сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал больше экзаменов, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов было втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов было на четвертом курсе?

197. Запишите каноническое разложение на простые множители для числа $15! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 15$.

198. Существует ли такое натуральное число n, что $2^n + 15$ — составное число?

199. Пятизначное число, являющееся точным квадратом, записывается с помощью цифр 0, 1, 2, 2, 2. Найдите это число.

200. Докажите, что десятичная запись любого натурального числа заканчивается той же цифрой, что и пятая степень этого числа.

201. Какими цифрами заканчиваются десятичные записи следующих чисел (x и y — натуральные числа):

1) $135^x + 31^y + 56^{x+y}$;
2) $142 + 142^2 + 142^3 + \ldots + 142^{20}$;
3) $34^x + 34^{x+1} + 34^{2x}$?

202. Докажите, что десятичные записи чисел $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ не могут заканчиваться цифрами 2, 3, 7 и 8.

203. При каких значениях натурального числа n сумма $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$ кратна 10?

204. Докажите, что:

1) $100\,002^4 > 9997^5$;
2) $31^4 < 7^{14}$.
3) $76^8 > 10^{15}$.

205. Докажите, что если p — простое число, причем $p \neq 2$, то $p^2 - 5$ не делится на 8.

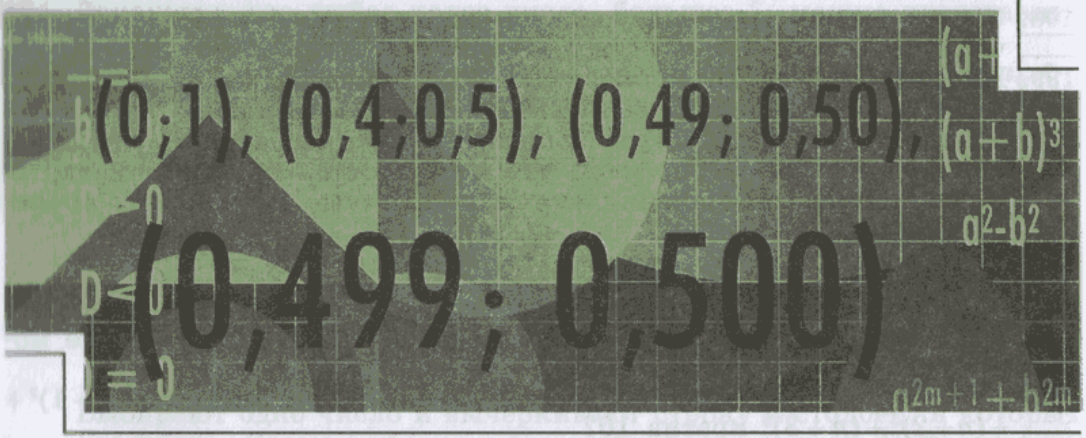
206. Докажите, что если n — натуральное число, не равное 1, то число $2^n - 1$ не может быть точным квадратом.

207. Вычислите наиболее рациональным способом:

$$\frac{7^{16} - 1}{2\,402\,000\,(49^4 + 1)}.$$

208. Найдите все трехзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

Глава V



ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. ЧИСЛА И КООРДИНАТЫ

1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИЗМЕРЕНИЕ ВЕЛИЧИН

В основе применения математических методов для решения практических задач лежат две операции — счет и измерение. При пересчете совокупностей различных предметов получаются натуральные числа, о которых шла речь в главе IV. Результаты измерений часто выражаются не только натуральными числами, но и дробями. Например, при измерении отрезков сначала выбирают отрезок AB, который называют *единичным*. Его длина считается равной единице. Если отрезок CD состоит из m частей, каждая из которых равна единичному отрезку, то считают, что длина этого отрезка равна m (рис. 20, *а*). Если же единичный отрезок разбит на n рав-

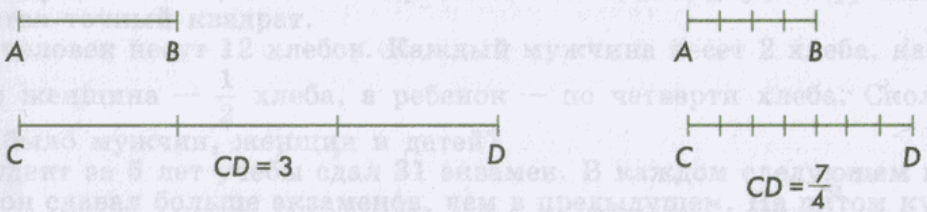


Рис. 20

ных частей, то длину каждой из них выражают дробью $\frac{1}{n}$. Наконец, если отрезок CD состоит из m равных отрезков, каждый из которых равен n-й доле единичного отрезка AB, то длину отрезка CD выражают дробью $\frac{m}{n}$ и пишут: $CD=\frac{m}{n}$ (рис. 20, *б*).

Напомним, что дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ равны, если выполняется равенство $mq=pn$. Например, $\frac{6}{8}=\frac{9}{12}$, так как $6\cdot 12=9\cdot 8=72$. Две равные дроби являются записями одного и того же *положительного рационального числа*. Длину любого отрезка можно с любой степенью точности выразить положительным рациональным числом. Однако в теоретических исследованиях появляются отрезки, длины которых не выражаются такими числами.

Пример 1.

Построим прямоугольный треугольник ABC, катеты которого имеют длину 1. Из рисунка 21 видно, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе этого треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах, а потому должно выполняться равенство $AC^2=2$. Покажем, что не существует положительного рационального числа, квадрат которого равен 2. В самом деле, если бы имело место равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, то мы имели бы $m^2=2n^2$. Но квадрат нечетного числа нечетен, а $2n^2$ — четное число. Значит, число m четно и имеет вид $m=2k$, где k — натуральное число. Поэтому имеем $(2k)^2=2n^2$, откуда $n^2=2k^2$. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что и n является четным числом, а тогда дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить на 2 вопреки предположению. Полученное противоречие показывает, что не существует положительного рационального числа, квадрат которого равен 2. А отсюда вытекает, что длину гипотенузы нашего треугольника нельзя выразить рациональным числом.

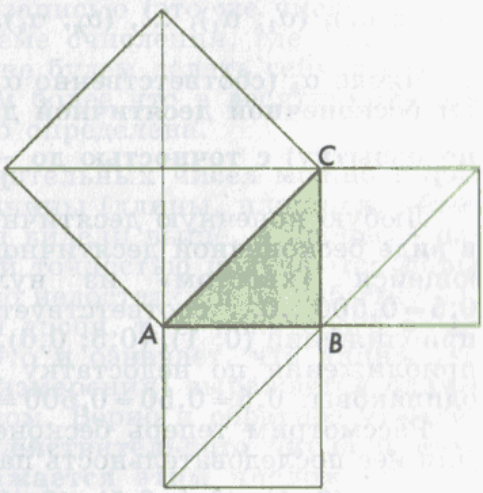


Рис. 21

Если длину отрезка нельзя выразить рациональным числом, то говорят, что он **несоизмерим** с единичным отрезком. Мы обнаружили существование несоизмеримых отрезков. Чтобы иметь возможность выражать длины любых отрезков числами, надо расширить имеющу-

ются у нас совокупность чисел и ввести числа нового вида, которые мы назовем **иррациональными**. Чтобы ввести такие числа, заметим, что при измерении отрезков возможны два случая:

а) длина измеряемого отрезка выражается конечной десятичной дробью n_0, $n_1n_2...n_k$ (например, 4,806);

б) длина измеряемого отрезка не может быть выражена конечной десятичной дробью.

Во втором случае длину отрезка можно измерять со все возрастающей точностью с помощью конечных десятичных дробей. Если обозначить через α_k приближенное значение длины отрезка с точностью до $\frac{1}{10^k}$ по недостатку, то десятичные дроби α_0, α_1, ..., α_k, ... будут иметь вид:

$$\alpha_0 = n_0;\ \alpha_1 = n_0,n_1;\ \alpha_2 = n_0,n_1n_2;\ ...;\ \alpha_k = n_0,n_1n_2...n_k;\ ... \qquad (1)$$

Здесь n_0 является натуральным числом или нулем, а n_1, n_2, ..., n_k, ... принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Например, при измерении длины диагонали единичного квадрата получаем последовательно числа 1; 1,4; 1,41; 1,414. Это следует из того, что

$$1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ \text{а}\ 1 < 2 < 4;$$

$$1{,}4^2 = 1{,}96,\ 1{,}5^2 = 2{,}25,\ \text{а}\ 1{,}96 < 2 < 2{,}25;$$

$$1{,}41^2 = 1{,}9881,\ 1{,}42^2 = 2{,}0164,\ \text{а}\ 1{,}9881 < 2 < 2{,}0164\ \text{и т. д.}$$

Вместо того чтобы писать бесконечную последовательность (1) десятичных дробей со все возрастающим числом десятичных знаков, пишут одну бесконечную десятичную дробь $\alpha = n_0,n_1n_2...n_k...$ (например, 1,4142...) и говорят, что она обозначает длину данного отрезка. Каждая такая дробь задает последовательность пар конечных десятичных дробей:

$$(\alpha_0;\ \alpha_0'),\ (\alpha_1;\ \alpha_1'),\ ...,\ (\alpha_k;\ \alpha_k'),\ ...,\ \text{где}\ \alpha_k = n_0,n_1n_2...n_k,\ \alpha_k' = \alpha_k + \frac{1}{10^k}.$$

Число α_k (соответственно α_k') называют **десятичным приближением бесконечной десятичной дроби α по недостатку** (соответственно **по избытку**) **с точностью до** $\frac{1}{10^k}$.

Любую конечную десятичную дробь n_0, $n_1n_2...n_k$ можно записать в виде бесконечной десятичной дроби $n_0,n_1n_2...n_k00...0...$, оканчивающейся «хвостом» из нулей. При этом, например, дроби $0{,}5 = 0{,}500...0...$ соответствует последовательность пар десятичных приближений (0; 1), (0,5; 0,6), (0,50; 0,51), (0,500; 0,501) и т. д. Все приближения по недостатку для этой дроби, начиная со второго, одинаковы: $0{,}5 = 0{,}50 = 0{,}500 = ...$.

Рассмотрим теперь бесконечную десятичную дробь 0,499...9... . Для нее последовательность пар десятичных приближений имеет вид

(0; 1), (0,4; 0,5), (0,49; 0,50), (0,499; 0,500) и т. д.

В этом случае совпадают десятичные приближения по избытку: $0,5 = 0,50 = 0,500 = \ldots$. Последовательность приближений по недостатку для первой дроби совпадает с последовательностью десятичных приближений по избытку для второй дроби. Это означает, что обе дроби выражают длину одного и того же отрезка, которая равна половине длины единичного отрезка. Иными словами, обе эти дроби являются десятичными записями одного и того же числа.

Чтобы не обозначать двумя способами одно и то же число, условились при их записи не использовать бесконечные десятичные дроби, оканчивающиеся «хвостом» из девяток. Такие дроби всегда можно заменить конечной десятичной дробью, заменив девятки из «хвоста» нулями и увеличив на 1 стоящую перед этим «хвостом» цифру. Например, $3,7299\ldots9\ldots = 3,7300\ldots0\ldots$. Основываясь на сказанном выше, введем следующее определение.

Определение. ***Положительным действительным числом*** α **называют бесконечную десятичную дробь** $n_0,n_1n_2\ldots n_k\ldots$, **не оканчивающуюся последовательностью девяток.**

Число n_0 **называют** ***целой частью*** **числа** $\alpha = n_0,n_1n_2\ldots n_k\ldots$, **а** $0,n_1n_2\ldots n_k\ldots$ **— его** ***дробной частью.*** **Пишут:**

$$n_0 = [\alpha], \quad 0,n_1n_2\ldots n_k\ldots = \{\alpha\}.$$

Например, если $\alpha = 14,271502\ldots$, то $[\alpha] = 14$ и $\{\alpha\} = 0,271502\ldots$. Множество положительных действительных чисел обозначают $\boldsymbol{R}_+$.

Замечание. На самом деле бесконечная десятичная дробь является не самим числом, а лишь его записью (это же число можно записать, например, в двоичной системе счисления, где получится бесконечная двоичная дробь). Но мы не будем делать сейчас различия между числом и его записью, тем более что в десятичной системе счисления эта запись однозначно определена.

С помощью положительных действительных чисел можно выразить результат измерения любой величины (длины, площади, объема, массы и т. д.). Например, как мы видели выше, в процессе измерения отрезков со все возрастающей точностью получаются пары чисел, являющиеся приближениями по недостатку и по избытку одной и той же бесконечной десятичной дроби, т. е. некоторого положительного действительного числа. Это и означает, что длина любого отрезка (при заданной единице измерения) выражается одним и только одним действительным числом. Верно и обратное утверждение: **для любого положительного действительного числа** α **найдется отрезок, длина которого выражается этим числом.** (Мы не приводим доказательства этого утверждения.)

Из вышесказанного следует, что между множеством $\boldsymbol{R}_+$ положительных действительных чисел и множеством длин отрезков можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Аналогично выражаются положительными действительными числами результаты измерения площадей и объемов. Лишь вместо единичного отрезка надо брать единичные квадраты или соответственно кубы.

Чтобы выразить изменения величин (их увеличение или уменьшение), кроме положительных действительных чисел, нужны отрицательные действительные числа и нуль. Назовем *отрицательным действительным числом* бесконечную дробь без «хвоста» из девяток со знаком «минус» перед ней: $\beta=-n_0,n_1n_2...n_k...$. Это число называют *противоположным* числу $\alpha=n_0,n_1n_2...n_k...$ и пишут: $\beta=-\alpha$, $\alpha=-\beta$. Тем самым определено множество отрицательных действительных чисел, которое обозначают $\boldsymbol{R}_-$. Число 0 имеет две десятичные записи: 0,00...0... и –0,00...0... . Из них мы будем пользоваться лишь первой. Таким образом, $0=-0$ — единственное действительное число, которое противоположно самому себе.

Для любого числа α *верно равенство* $\alpha=-(-\alpha)$.

Если α положительно и $\beta=-\alpha$, то полагают $\beta_k=-\alpha'_k$, $\beta'_k=-\alpha_k$ и называют число β_k (соответственно β'_k) *десятичным приближением числа* β *по недостатку* (соответственно *по избытку*). Далее, если β не является целым числом, полагают $[\beta]=-[\alpha]-1$ и $\{\beta\}=1-\{\alpha\}$. Для целых β полагают $[\beta]=-\alpha$ и $\{\beta\}=0$. Например, если $\beta=-2{,}71828...$, то $\beta_3=-2{,}719$, $\beta'_3=-2{,}718$, $[\beta]=-3$, $\{\beta\}=1-0{,}71828...=0{,}2817...$. Если $\beta=-3$, то $[\beta]=-3$, $\{\beta\}=0$.

Научимся сравнивать действительные числа. Положительные действительные числа сравнивают друг с другом так же, как числа, выражаемые конечными десятичными дробями. Именно: *если* $\alpha=n_0,n_1n_2...n_k...$ *и* $\beta=m_0,m_1m_2...m_k...$, *то считают, что* $\alpha=\beta$, *если* $n_0=m_0$, $n_1=m_1$ и т. д. *и считают*, что $\alpha<\beta$ *в следующих случаях:*

а) $n_0<m_0$; б) $n_0=m_0$ *и* $n_1<m_1$; в) $n_0=m_0$ *и существует такое* $k\in\boldsymbol{N}$, *что* $n_1=m_1$, ..., $n_k=m_k$, *но* $n_{k+1}<m_{k+1}$.

Пример 2.

Выясним, какое из чисел больше: $\alpha=1{,}4142...$ или $\beta=1{,}4146...$.

Решение. Так как равны целые части обоих чисел и первые 3 цифры после запятой, а четвертая цифра больше у числа β, $2<6$, то $\alpha<\beta$.

Если α *— отрицательное число, а* β *— положительное число, то считают, что* $\alpha<0<\beta$. *Если* α *и* β *— отрицательные числа, то* $\alpha<\beta$ *в том и только в том случае, когда* $-\beta<-\alpha$.

Объединение множеств $\boldsymbol{R}_+$, $\boldsymbol{R}_-$ и $\{0\}$ составляет множество всех действительных чисел, которые принято обозначать буквой $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_-\cup\{0\}\cup\boldsymbol{R}_+.$$

Для этого множества мы определили отношение равенства и отношение строгого порядка *меньше:* $\alpha<\beta$. Некоторые свойства этого отношения мы рассмотрим в § 3 этой главы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен: 3; 5; 6; 2,1.
2. Докажите, что не существует рационального числа, куб которого равен: 2; 3; 4; 6; 2,1.
3. Докажите, что целое число, не являющееся квадратом целого числа, не может быть и квадратом рационального числа.
4. Докажите, что целое число, не являющееся кубом целого числа, не может быть и кубом рационального числа.
5. Найдите для следующих чисел их целые и дробные части, а также приближения по недостатку и по избытку с точностью до 0,01 и до 0,0001:

   1) $\pi = 3{,}1415926\ldots$;
   2) $-\pi$;
   3) $0{,}5189773\ldots$;
   4) $-0{,}5189773\ldots$;
   5) $0{,}0063754$;
   6) $-0{,}0063754$.

6. Докажите, что если для положительной бесконечной десятичной дроби все приближения по недостатку, начиная с k-го, совпадают, то все ее цифры, начиная с некоторой, равны нулю. Сформулируйте аналогичное утверждение для приближений по избытку.
7. Существует ли наименьшее число, которое больше 0,52?
8. Найдите наибольшее действительное число, которое меньше 0,9 и в десятичную запись которого не входит цифра 9.
9. Найдите наименьшее действительное число, которое больше чем 7,6, причем в его десятичную запись не входят цифры 0, 1 и 2.

2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Любое рациональное число является действительным, т. е. может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби. Чтобы получить такую запись для числа $\frac{m}{n}$, надо разделить уголком m на n. Например, деля 1 на 3, получаем бесконечную десятичную дробь $0{,}33\ldots3\ldots$. Значит, $\frac{1}{3} = 0{,}33\ldots3\ldots$. Если взять десятичное приближение числа $\frac{1}{3}$ по недостатку, то после умножения на 3 получаем число, меньшее 1, например $0{,}3333 \cdot 3 = 0{,}9999$. Если же взять приближение по избытку, то после умножения на 3 получаем число, большее чем 1, например $0{,}3334 \cdot 3 = 1{,}0002$. Вообще, при обращении числа $\frac{m}{n}$ в бесконечную десятичную дробь α для любого k верны неравенства $n\alpha_k \leqslant m < n\alpha'_k$.

Если обратим в бесконечную десятичную дробь числа $\frac{1}{7}$ и $\frac{8}{45}$, то получим $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$ и $\frac{8}{45} = 0{,}1777\ldots$. В каждом из рас-

смотренных выше примеров получается десятичная дробь, обладающая следующим свойством: начиная с некоторого места, в ней повторяется одна и та же группа цифр (для $\frac{1}{3}$ — цифра 3, для $\frac{1}{7}$ — группа цифр 142857 и т. д.). Введем следующее определение.

Определение. Бесконечная десятичная дробь называется *периодической*, если она, начиная с некоторого места, образована повторением одной и той же цифры или группы цифр. Повторяющуюся цифру или повторяющуюся наименьшую группу цифр называют *периодом*, а число цифр в периоде — *длиной периода*.

Если период дроби стоит сразу после запятой, дробь называют *чисто периодической*, в противном случае — *смешанной периодической*.

Таким образом, для дробей $\frac{1}{3}$ и $\frac{8}{45}$ длина периода равна 1, при этом для $\frac{1}{3}$ период 3 начинается сразу после запятой, и потому 0,33...3... чисто периодическая бесконечная десятичная дробь. Дробь же 0,177...7..., соответствующая $\frac{8}{45}$,— смешанная периодическая дробь. Для $\frac{1}{7}$ соответствующая периодическая дробь образована повторением периода 142857. Она является чисто периодической дробью с длиной периода 6.

Обычно период дроби пишут один раз, заключив его в скобки: $0,33...3... = 0,(3)$; $0,142857142857... = 0,(142857)$; $0,177...7... = 0,1(7)$.

Бесконечная десятичная дробь, соответствующая дроби $\frac{m}{n}$, всегда периодична. Это следует из того, что при делении m на n может получиться не более чем n различных остатков: 0, 1, 2, ..., $n-1$. Поэтому среди n идущих подряд остатков должны быть по принципу Дирихле хотя бы два одинаковых. Но повторение остатков означает и повторение соответствующих цифр в частном, т. е. периодичность получающейся бесконечной десятичной дроби (если остаток равен нулю, то эта дробь может быть записана и как конечная десятичная дробь).

Мы доказали, что рациональные числа выражаются перидиоческими десятичными дробями. Поэтому непериодические десятичные дроби выражают числа нового типа, не являющиеся рациональными. Числа, не являющиеся рациональными, называют **иррациональными**. Например, иррациональное число 0,101001000100001..., поскольку число нулей, следующих за единицей, все время увеличивается. Ниже мы покажем, что каждой периодической десятичной дроби соответствует рациональное число, а потому любое иррациональное число выражается непериодической бесконечной десятичной дробью (см. п. 4).

УПРАЖНЕНИЯ

10. Докажите, что следующие бесконечные десятичные дроби выражают иррациональные числа:

1) 0,73773777377773...; 2) 0,56556555556555555556... .

11. Следующие рациональные числа запишите в виде конечных или периодических десятичных дробей:

а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{7}{200}$; в) $\frac{19}{625}$; г) $\frac{3449}{3125}$; д) $\frac{4}{7}$; е) $\frac{10}{11}$; ж) $\frac{1}{17}$; з) $\frac{3}{11}$;

и) $\left(8\frac{21}{22}-11\frac{5}{11}\right):1\frac{1}{4}+\frac{17}{12}$;

к) $\dfrac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230\frac{1}{25}+46\frac{3}{4}}{\left(1\frac{3}{7}+\frac{10}{3}\right):\left(12\frac{1}{3}-14\frac{3}{7}\right)}$.

12. Докажите, что длина периода бесконечной десятичной дроби, соответствующей дроби $\frac{m}{n}$, является делителем числа $n-1$.

3. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Определим во множестве $\boldsymbol{R}$ операции сложения, вычитания, умножения и деления.

Чтобы определить сумму действительных чисел, надо указать правило, позволяющее по десятичным записям слагаемых найти десятичную запись суммы. При этом достаточно рассмотреть случай, когда оба слагаемых положительны. Пусть

$$\alpha = m_0, m_1 m_2 \ldots m_k \ldots \text{ и } \beta = n_0, n_1 n_2 \ldots n_k \ldots .$$

Образуем десятичные приближения чисел α и β с избытком: α'_0, α'_1, ..., α'_k, ..., β'_0, β'_1, ..., β'_k, ... и сложим α'_0 с β'_0, α'_1 с β'_1, α'_2 с β'_2 и т. д. Получаем последовательность таких сумм:

$$\alpha'_0+\beta'_0,\ \alpha'_1+\beta'_1,\ \alpha'_2+\beta'_2,\ \ldots,\ \alpha'_k+\beta'_k,\ \ldots .$$

Так как $\alpha'_k \geqslant \alpha'_{k+1}$ и $\beta'_k \geqslant \beta'_{k+1}$, то $\alpha'_k+\beta'_k \geqslant \alpha'_{k+1}+\beta'_{k+1}$, а потому каждый следующий член этой последовательности не превосходит предыдущего. Тем же свойством обладают и целые части этих сумм:

$$[\alpha'_0+\beta'_0] \geqslant [\alpha'_1+\beta'_1] \geqslant \ldots \geqslant [\alpha'_k+\beta'_k] \geqslant \ldots . \qquad (1)$$

Эти целые части являются натуральными числами, и поэтому среди них есть наименьшее число. Тогда все числа, идущие за этим наи-

меньшим числом в выражении (1), одинаковы. Как только это достигнуто, начинаем следить за цифрой десятых. По тем же соображениям она тоже начнет с некоторого места повторяться, и мы перейдем к слежению за цифрой сотых. Так одна за другой будут появляться цифры суммы чисел α и β.

Пример.

Найдем первые пять цифр суммы $3{,}14159\ldots + 2{,}71828\ldots$.

Решение. Суммы приближений по избытку имеют вид

$$4+3;\ 3{,}2+2{,}8;\ 3{,}15+2{,}72;\ 3{,}142+2{,}719;$$
$$3{,}1416+2{,}7183;$$
$$3{,}14160+2{,}71829;\ \ldots,$$

т. е.

$$7;\ 6{,}0;\ 5{,}87;\ 5{,}861;\ 5{,}8599;\ 5{,}85989;\ \ldots\ .$$

Целые числа 7, 6, 5, 5, 5, ... стабилизируются на числе 5, сразу после этого цифра десятых стабилизируется на числе 8, потом цифра сотых — на числе 5, цифра тысячных — на числе 9, а если продолжить сложение, то увидим, что цифра десятитысячных стабилизируется на числе 8. Поэтому имеем

$$3{,}14159\ldots + 2{,}71828\ldots = 5{,}8598\ldots\ .$$

Аналогично определяется вычитание положительных действительных чисел, только здесь надо рассмотреть последовательность

$$\alpha'_0 - \beta_0,\ \alpha'_1 - \beta_1,\ \ldots,\ \alpha'_k - \beta_k,\ \ldots\ .$$

Далее для определения произведения положительных действительных чисел α и β берем последовательность произведений

$$\alpha'_0\beta'_0,\ \alpha'_1\beta'_1,\ \ldots,\ \alpha'_k\beta'_k,\ \ldots$$

и тоже следим за тем, как одна за другой стабилизируются цифры этих произведений.

Наконец, определяем частное $\dfrac{\alpha}{\beta}$ с помощью последовательности чисел

$$\frac{\alpha'_1}{\beta_0},\ \frac{\alpha'_1}{\beta_1},\ \ldots,\ \frac{\alpha'_k}{\beta_k},\ \ldots,$$

каждое из которых надо еще превратить в бесконечную десятичную дробь.

С помощью операций над положительными действительными числами выражаются некоторые геометрические утверждения. Например, справедливы следующие утверждения:

а) если C — точка, лежащая внутри отрезка AB, то длина этого отрезка равна сумме длин отрезков AC и CB;

б) если фигура состоит из нескольких частей, то ее площадь равна сумме площадей частей;

в) площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон;

г) объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин его ребер.

Доказательство этих утверждений проводится в геометрии (в некоторых аксиоматиках утверждение «а» принимается за аксиому), причем эти доказательства опираются на приведенные определения арифметических действий над положительными действительными числами.

После того как введены операции над положительными действительными числами, их распространяют на отрицательные числа и нуль. Тем самым эти операции определяются для всех действительных чисел. Можно доказать, что так введенные операции обладают всеми свойствами операций над рациональными числами, а именно:

1) Арифметические операции определены для любых пар действительных чисел, исключая операцию деления, которая определена, если делитель не равен нулю.

2) Как сложение, так и умножение обладают свойствами переместительности и сочетательности:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha,\ \alpha\beta=\beta\alpha;$$
$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),\ (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma).$$

3) Умножение обладает свойством распределительности относительно сложения:

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

4) Имеет место «правило знаков»:

$$(-\alpha)\beta=\alpha(-\beta)=-\alpha\beta,\ (-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta.$$

5) Для каждого отличного от нуля числа α существует такое число $\frac{1}{\alpha}$, что $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$.

6) Выполняются равенства $\alpha+0=\alpha$ и $\alpha\cdot 1=\alpha$.

Из этих свойств, лежащих в основе школьной алгебры, вытекают остальные свойства операций над числами. В частности, из них следует, что равенство **$\alpha\beta=0$ имеет место в том и только в том случае, когда хотя бы один из множителей равен нулю.**

Этим свойством мы пользовались при решении уравнений.

В заключение определим понятие модуля действительного числа:

Модулем числа α **называют такое число** $|\alpha|$, **что**

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \text{если } \alpha\geqslant 0,\\ -\alpha, & \text{если } \alpha<0.\end{cases}$$

Из определений операций над действительными числами вытекают следующие свойства модуля:

а) $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$;

б) $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$;

в) $\left|\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}$, $\alpha\neq 0$;

г) $|\alpha-\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|$.

Докажем, например, свойство «а». Если α и β имеют одинаковые знаки, то модуль их суммы равен сумме модулей (и сумма имеет тот же знак, что и слагаемые). В этом случае $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$. Если же знаки α и β различны, то модуль числа $\alpha+\beta$ равен разности большего и меньшего из модулей чисел α и β и потому меньше суммы модулей этих чисел. В этом случае $|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$. Наконец, если хотя бы одно из чисел α, β равно нулю, равенство $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ очевидно. Таким образом, во всех случаях имеем

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

Обозначая в неравенстве «а» $\alpha+\beta=\gamma$, получаем, что $|\gamma|\leqslant|\gamma-\beta|+|\beta|$, т. е. $|\gamma-\beta|\geqslant|\gamma|-|\beta|$. Тем самым доказано свойство «г».

УПРАЖНЕНИЯ

13. Запишите с помощью знака модуля неравенство:

а) $-3<x<3$; в) $-4<x+1<4$; д) $-3\leqslant x\leqslant 5$;
б) $-7\leqslant x\leqslant 7$; г) $-5<x<3$; е) $-8\leqslant x\leqslant 4$.

14. Решите неравенство:

а) $|x-4|<5$; г) $|x+2|+|x-2|\geqslant 12$;
б) $|x+3|\geqslant 2$; д) $|x-4|+|x+4|\leqslant 10$;
в) $|x|<x+1$; е) $||3-x|-2|\leqslant|x-1|$.

15. Число α иррационально. Докажите, что число $\frac{1}{\alpha}$ тоже иррационально.

16. Укажите два иррациональных числа, сумма которых рациональна.

17. Укажите два разных иррациональных числа, произведение которых рационально.

18. Пусть числа α и β иррациональны, а число r рационально. Какие из следующих чисел могут принимать рациональные значения:

а) $\alpha+\beta$; б) $\alpha\beta$; в) $\alpha+r$; г) αr?

4. ОБРАЩЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ В ОБЫКНОВЕННЫЕ

Операция умножения действительных чисел на 10, 100, 1000 и т. д. выполняется так же, как и для конечных десятичных дробей,— путем переноса запятой. Пользуясь этим замечанием, легко обратить любую периодическую десятичную дробь в обыкновенную.

Обратим, например, в обыкновенную дробь периодическую дробь

$$x=0,(246)=0,246246\ldots246\ldots .$$

Если умножить обе части равенства на 1000, получаем

$$1000x = 246{,}246246\ldots246\ldots = 246 + 0{,}246246\ldots246\ldots = 246 + x.$$

Отсюда находим, что $999x = 246$, и потому $x = \frac{246}{999}$.

Десятичная дробь $0{,}00(246)$ в 100 раз меньше, чем $0{,}(246)$, и потому

$$0{,}00(246) = \frac{246}{999} : 100 = \frac{246}{99\,900}.$$

Дробь же $0{,}78(246)$ можно записать в виде суммы

$$0{,}78(246) = 0{,}78 + 0{,}00(246),$$

и поэтому она равна:

$$\frac{78}{100} + \frac{246}{99\,900} = \frac{78 \cdot 999 + 246}{99\,900} = \frac{78\,246 - 78}{99\,900}.$$

После сокращения получаем, что $0{,}78(246) = \frac{6514}{8325}$.

Общее правило обращения периодических десятичных дробей в обыкновенные формулируется следующим образом:

Чисто периодическая правильная[*)] *десятичная дробь равна обыкновенной дроби, в числителе которой записан период, а знаменатель состоит из стольких девяток, сколько цифр в периоде.*

Смешанная правильная периодическая десятичная дробь равна обыкновенной дроби, в числителе которой стоит разность между числом, образованным цифрами, стоящими после запятой до начала второго периода, и числом, образованным цифрами, стоящими после запятой до начала первого периода; знаменатель состоит из стольких девяток, сколько цифр в периоде, и стольких нулей, сколько цифр стоит до начала первого периода.

Например,

$$0{,}(142\,857) = \frac{142\,857}{999\,999} = \frac{1}{7},\quad 0{,}24(617) = \frac{24\,617 - 24}{99\,900} = \frac{24\,593}{99\,900}.$$

В пункте 2 мы уже показали, что любому рациональному числу соответствует периодическая десятичная дробь, не оканчивающаяся последовательностью девяток. Сейчас мы установили, что любой периодической десятичной дроби, не оканчивающейся последовательностью девяток, соответствует некоторое рациональное число. Таким образом, между множеством периодических десятичных дробей, не оканчивающихся последовательностью девяток, и множеством рациональных чисел установлено взаимно-однозначное соответствие, т. е. эти множества эквивалентны.

---

*) Десятичную дробь называют *правильной*, если ее целая часть равна нулю.

Если не исключать периодические десятичные дроби, оканчивающиеся последовательностью девяток, то взаимно-однозначное соответствие нарушится. Например, числу $\frac{1}{2}$ соответствуют две периодические десятичные дроби 0,4999... и 0,5000... .

УПРАЖНЕНИЯ

19. Обратите в обыкновенную дробь:

а) 0,(2); б) 0,(23); в) 1,(7); г) 3,5(72).

20. Вычислите:

а) $0,(2)+0,(3)$;

б) $0,(2)+0,(37)$;

в) $0,(73)-0,(487)$;

г) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}+0,131\right):0,25}{0,09837(8):0,0925}$;

д) $\dfrac{0,725+\frac{3}{5}+0,175+0,421(61)+0,12(83)}{0,128\cdot 6,25-0,0345:0,12}$;

е) $\dfrac{0,8341(6)+0,17(1)}{0,8341(6)-0,17(1)}+\dfrac{0,8(5)+0,1(6)}{0,8(5)-0,1(6)}$.

5. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА ПРЯМОЙ ЛИНИИ И НА ПЛОСКОСТИ

Выберем на прямой линии l точку O (начало отсчета), направление и, кроме того, зададим единичный отрезок (рис. 22, *а*). Тогда каждой точке A этой прямой соответствует отрезок OA. В пункте 1 мы установили существование взаимно-однозначного соответствия между множеством длин всех отрезков и множеством $\boldsymbol{R}_+$. Поэтому каждой точке A можно поставить в соответствие действительное число x по следующему правилу: взять x равным длине отрезка OA со знаком «плюс», если направление отрезка совпадает с выбранным направлением на прямой l, и со знаком «минус» в противном случае. Точке O поставим в соответствие число $x=0$. Тогда между множеством точек прямой l и множеством $\boldsymbol{R}$ действительных чисел будет установлено взаимно-однозначное соответствие. Поэтому прямую l, на которой выбрано начало отсчета O, направление и единичный отрезок, называют *координатной прямой*, а число x, соответствующее точке A, называют *коор-*

Рис. 22 а) б)

динатой точки A и пишут $A(x)$ (читают: точка A с координатой x). Точка O имеет координату, равную нулю.

Модуль числа x равен длине отрезка OA, где A — точка с координатой x. Если $A(x_1)$ и $B(x_2)$ — точки координатной прямой, то расстояние между этими точками равно $|x_2-x_1|$.

Для доказательства надо разобрать шесть взаимных положений точек O, A и B и показать справедливость нашего равенства во всех случаях. Например, для рисунка 22, *б* имеем

$$AB=OB-OA=x_2-x_1=|x_2-x_1|.$$

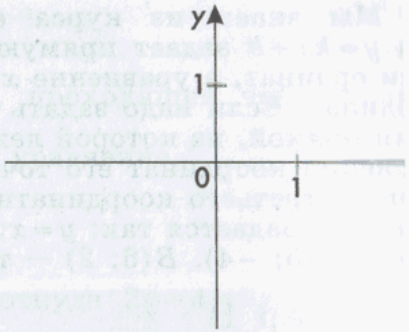


Рис. 23

Аналогично определяют систему координат на плоскости. Для этого выбирают на плоскости точку O — начало координат — и проводят через нее две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy (**оси координат**, рис. 23). На каждой из этих прямых выбираем направление и, кроме того, выбираем единичный отрезок. Получаем систему прямоугольных координат на плоскости. Такую систему координат называют **декартовой**, в честь французского математика и философа Рене Декарта (1596—1650), который впервые ввел такие системы координат.

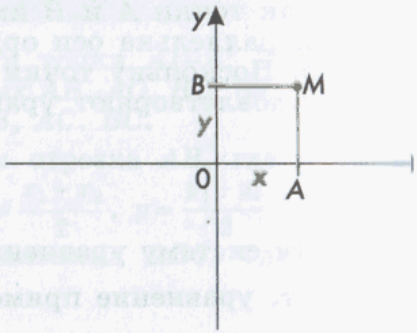


Рис. 24

Каждой точке M на плоскости поставим в соответствие два числа x и y, называемые соответственно **абсциссой** и **ординатой** этой точки. Для этого опустим из точки M перпендикуляры MA и MB на оси координат (рис. 24). Абсцисса x точки M — это координата точки A на прямой Ox, а ордината y для M — это координата точки B на прямой Oy. Этим правилом устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством точек M плоскости и декартовым произведением $\{x\}\times\{y\}$ множества абсцисс и множества ординат точек M. Точку M с абсциссой x и ординатой y обозначают $M(x;\ y)$. Числа x и y называют **координатами точки** M.

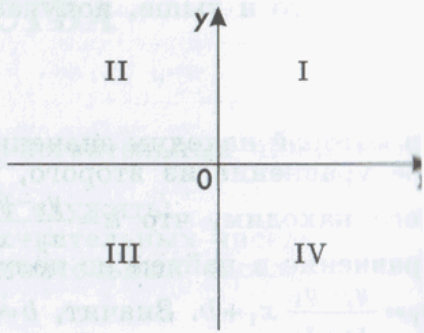


Рис. 25

Оси координат делят плоскость на 4 части, называемые **квадрантами** или координатными четвертями (рис. 25).

Мы знаем из курса алгебры 7 класса, что уравнение вида $y=kx+b$ задает прямую линию на плоскости, не параллельную оси ординат, а уравнение $x=a$ — прямую линию, параллельную оси ординат. Если надо задать отрезок на плоскости, то, кроме уравнения прямой, на которой лежит этот отрезок, указывают границы изменения координат его точек. Например, отрезок биссектрисы первого и третьего координатных углов, имеющий концы $A(-3;\ -3)$ и $B(4;\ 4)$, задается так: $y=x$, $-3\leqslant x\leqslant 4$, а отрезок прямой $x=6$ с концами $A(6;\ -4)$, $B(6;\ 2)$ — так: $x=6$, $-4\leqslant y\leqslant 2$.

Пример 1.

Напишем уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;\ 3)$ и $B(4;\ 4)$.

Так как точки A и B имеют различные абсциссы, искомая прямая не параллельна оси ординат, и потому ее уравнение имеет вид $y=kx+b$. Поскольку точки A и B лежат на этой прямой, их координаты удовлетворяют уравнению $y=kx+b$, т. е. выполняются равенства

$$\begin{cases} 3=2k+b, \\ 4=4k+b. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим значения k и b: $k=\frac{1}{2}$, $b=2$.

Значит, уравнение прямой имеет вид $y=\frac{1}{2}x+2$.

Чтобы не решать каждый раз систему уравнений, решим эту задачу в общем виде, т. е. найдем уравнение прямой линии, проходящей через точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Если $x_1\neq x_2$, то таким же образом, что и выше, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y_1=kx_1+b, \\ y_2=kx_2+b, \end{cases}$$

из которой находим значения k и b. Именно, вычитая почленно первое уравнение из второго, получаем равенство $y_2-y_1=kx_2-kx_1$. Из него находим, что $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Подставим это значение k в первое уравнение и найдем из получившегося уравнения значение b. Имеем $y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1+b$. Значит, $b=y_1-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1$, и потому искомое уравнение имеет вид $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+y_1-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1$. Обычно его записывают в более симметричной форме:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Если $x_1=x_2$, то точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ лежат на прямой $x=x_1$, параллельной оси ординат.

Пример 2.

Напишем уравнение прямой линии, проходящей через точки $A(6; -2)$ и $B(8; 3)$.

Решение. По формуле (1) получаем уравнение

$$\frac{y-(-2)}{3-(-2)}=\frac{x-6}{8-6}.$$

Упрощая его, находим $\frac{y+2}{5}=\frac{x-6}{2}$, откуда $2y+4=5x-30$, т. е. $2y=5x-34$. Значит, $y=2{,}5x-17$.

УПРАЖНЕНИЯ

21. Отметьте на координатной плоскости точки $A(-4; 3)$, $B(2; 2)$, $C(4; -7)$. Напишите уравнения прямых AB, AC, BC. Задайте уравнениями и неравенствами отрезки AB, AC, BC.

22. Докажите, что координаты середины отрезка AB, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, выражаются формулами $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$.

23. Напишите уравнения медиан треугольника ABC, где $A(8; 4)$, $B(-2; 6)$, $C(-4; -8)$.

§ 2. БЕСКОНЕЧНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА

6. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Любое подмножество множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел называют **числовым множеством.**

Примерами числовых множеств могут служить:

а) множество $\boldsymbol{R}_+$ положительных действительных чисел;

б) множество $\boldsymbol{R}_-$ отрицательных действительных чисел;

в) множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел;

г) множество $\boldsymbol{Z}$ целых чисел;

д) множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел; $\boldsymbol{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел;

е) числовой луч $[a; +\infty)$, т. е. множество $\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ a \leqslant x\}$;

ж) числовой луч $(-\infty; a]$, т. е. множество $\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x \leqslant a\}$;

з) множество периметров многоугольников, вписанных в данную окружность.

Числовым отрезком с концами a и b называют множество

$$\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

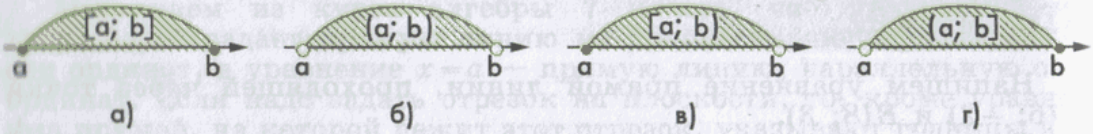


Рис. 26

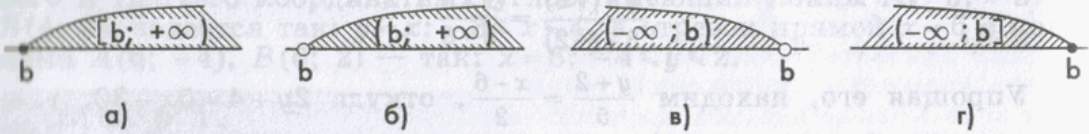


Рис. 27

Такой отрезок обозначают $[a; b]$. Заметим, что отрезку $[a; b]$ концы принадлежат. Числовым интервалом с концами a и b называют множество $\{x | x \in \boldsymbol{R},\ a < x < b\}$. Этот интервал обозначают $(a; b)$. Таким образом, в интервал $(a; b)$ концы не входят. Очевиден смысл обозначений $[a; b)$, $(a; b]$.

Условимся координатную прямую иногда называть числовой осью и в тех случаях, когда это удобно, вместо «точка A с координатой x» говорить «точка x», отмечая на числовой оси букву x вместо $A(x)$.

Числовые множества $[a; b]$, $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$, $[b; +\infty)$, $(b; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$ обычно называют **числовыми промежутками** и изображают на числовой оси (рис. 26, 27).

Пример 1.

Пусть даны множества $A=[1; 6]$, $B=(2; 9)$. Если изобразим эти множества на числовой оси, то увидим, что $A \cap B=(2; 6]$ (рис. 28, *а*) и $A \cup B=[1; 9)$ (рис. 28, *б*). ▲

В пункте 3 для любых двух чисел a и b множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел определены операции сложения, вычитания, умножения и деления при $b \neq 0$. При этом результат операции тоже является действительным числом и, значит, принадлежит множеству $\boldsymbol{R}$. Однако, если арифметические операции рассматривать не на всем множестве $\boldsymbol{R}$, а на некотором его подмножестве, то результаты операций могут принадлежать или не принадлежать этому подмножеству. Например, числа 2 и 5 принадлежат множеству N натуральных чисел, а результат деления 2 на 5 не принадлежит N. В то же время сумма любых двух натуральных чисел является натуральным числом. В этом

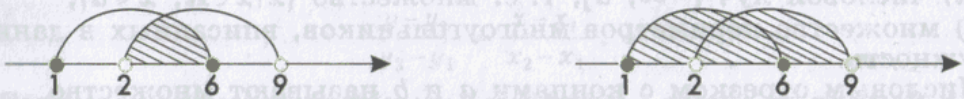


Рис. 28

случае говорят, что множество N замкнуто относительно операции сложения, но не замкнуто относительно операции деления. В общем случае имеет место

Определение. Если для любой пары чисел множества A результат некоторой арифметической операции принадлежит множеству A, то множество A называют *замкнутым* относительно этой операции.

Ясно, что множество N замкнуто также относительно операции умножения, но не замкнуто относительно операции вычитания. Множество Z замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и не замкнуто относительно деления. Множество Q замкнуто относительно всех арифметических операций, но не замкнуто относительно операции извлечения корня, которую мы рассмотрим немного позже.

Важным отличием бесконечных числовых множеств от конечных является то, что любое конечное множество имеет наибольший и наименьший элементы, а для бесконечных числовых множеств этот факт может и не иметь места. Например, множество N натуральных чисел имеет наименьший элемент 1, но не имеет наибольшего элемента, так как для всякого числа $n \in N$ число $n+1>n$.

Множество Z не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элемента. Множество $R_- \cup \{0\}$ не имеет наименьшего элемента, но имеет наибольший элемент 0.

Если числовое множество A имеет наименьший элемент a, то для любого элемента $x \in A$ выполняется неравенство $a \leqslant x$. Если b — наибольший элемент множества A, то для каждого элемента $x \in A$ выполняется неравенство $x \leqslant b$. Если в множестве A одновременно есть и наименьший элемент a, и наибольший элемент b, то, очевидно, $a \leqslant x \leqslant b$ для всех элементов $x \in A$. В первом случае говорят, что *множество A ограничено снизу* (числом a), во втором — *множество A ограничено сверху*, в третьем случае — *множество A ограничено*. Произвольное числовое множество A называется ограниченным, если существует положительное действительное число a, такое, что для всех $x \in A$ выполняется неравенство $|x|<a$. Например, множество $A=\left\{\frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in N\right\}$ ограничено, так как $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<2$ для всех $n \in N$.

УПРАЖНЕНИЯ

24. Найдите множество значений переменной, при которых имеет смысл уравнение:

а) $x^2+5x+7+\frac{1}{x^2-x}=1+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x}$;

б) $x^2+b^2+\frac{1}{x^2-4a^2}=0$.

25. Найдите множество корней уравнения:

а) $\frac{12x+1}{6x-2}-\frac{9x-5}{3x+1}=\frac{108x-36x^2-9}{4(9x^2-1)}$;

б) $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}$;

в) $\frac{x+4}{2x^2-8x+6}-\frac{x-3}{2-2x^2}=\frac{x+6}{x^2-3x^2-x+3}$;

г) $\frac{x+5}{2x^2+6x-8}+\frac{x-7}{64-4x^2}+\frac{9}{x^3-x^2-16x+16}=0$.

26. Совпадают ли множества корней для пары уравнений:

а) $x^2-6x+9=0$ и $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x(x-2)}=\frac{1}{x(x+2)}$;

б) $x^2+6x=0$ и $|x+7|=1$;

в) $x^2-6x+8=0$ и $\frac{(3x-6)(x-4)}{5}=0$?

27. Даны множества: $A_1=\{-1;\ 0;\ 1\}$, $A_2=\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$, $A_3=\{2k\,|\,k\in Z\}$, $A_4=\{2k+1\,|\,k\in Z\}$, $A_5=\left\{\frac{k}{2}\,\middle|\,k\in Z\right\}$, $A_6=Q\setminus Z$. Исследуйте замкнутость каждого из них относительно сложения и умножения.

7. СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Для сравнения бесконечных множеств по количеству элементов мы в пункте 10 главы III ввели понятие взаимно-однозначного соответствия. Множества, между которыми можно установить взаимно-однозначное соответствие, назвали эквивалентными. Такие множества имеют как бы одинаковое количество элементов. Но слово «количество» плохо подходит для бесконечных множеств, поэтому эквивалентные множества называют равномощными или имеющими одинаковую мощность.

В этом пункте мы рассмотрим бесконечные числовые множества, эквивалентные множеству натуральных чисел. Такие множества называют **счетными**.

Пусть множество A счетно. Тогда каждому его элементу может быть поставлено в соответствие какое-либо натуральное число, каждое один раз, и при этом все натуральные числа будут израсходованы. Если это натуральное число считать номером данного элемента, то каждый элемент множества A получает некоторый номер, причем различные элементы получают различные номера. Поэтому можно сказать: **бесконечное множество счетно, если его элементы можно перенумеровать.**

Простым примером счетного множества служит множество натуральных чисел $N=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots;\ n;\ \ldots\}$. Здесь число n само является своим «номером». Если взять множество $\{2n\,|\,n\in N\}$ четных на-

туральных чисел, то это множество нетрудно «перенумеровать». Для этого каждому числу $2n$ дадим номер n:

Четное число	2	4	6	8	...	$2n$ ...
Номер	1	2	3	4	...	n ...

Вообще любое бесконечное подмножество A множества N натуральных чисел счетно. В самом деле, расположим числа множества A в порядке возрастания. Тогда какое-то число станет первым, и, начиная с него, занумеруем остальные.

Например, счетными являются: множество нечетных натуральных чисел, множество натуральных чисел, кратных 5. Хотя эти множества являются подмножествами множества N, для нумерации их элементов будут израсходованы все натуральные числа.

В этом проявляется удивительное свойство бесконечных множеств: существует бесконечная часть множества, равномощная со всем множеством, т. е. множество и его бесконечное подмножество имеют как бы одинаковое «количество» элементов. Никакое конечное множество таким свойством не обладает. В этом принципиальное отличие конечных и бесконечных множеств.

Рассмотрим множество Z всех целых чисел:

$$..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...$$

На первый взгляд кажется, что это множество перенумеровать нельзя, так как все числа, «нужные» для нумерации, будут израсходованы в правой части множества. Однако эту нумерацию можно осуществить, поступив следующим образом: двигаться по множеству Z не в одном направлении (вправо или влево), а все время меняя направление, каждый раз пересекая число 0. Иными словами, будем нумеровать так:

Число	...	$-n$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	n ...
Номер	...	$2n+1$	...	7	5	3	1	2	4	6	...	$2n$ ...

При такой нумерации число n ($n=1, 2, 3, ...$) получит номер $2n$, а число $-n$ ($n=0, 1, 2, 3, ...$) — номер $2n+1$.

Рассмотрим множество положительных несократимых дробей вида $\frac{m}{n}$, т. е. множество $A=\left\{\frac{m}{n}\middle| m\in N,\ n\in N,\ D(m, n)=1\right\}$. Каждой дроби $\frac{m}{n}$ поставим в соответствие число $2^m \cdot 3^n$. Тогда, если $\frac{m_1}{n_1} \neq \frac{m_2}{n_2}$, то $2^{m_1} \cdot 3^{n_1} \neq 2^{m_2} \cdot 3^{n_2}$. Значит, в силу единственности разложения натуральных чисел на простые множители (§ 2, п. 6, гл. IV), разным дробям будут соответствовать разные натуральные числа. Если эти натуральные числа расположить в порядке возрастания и перенумеровать, то тем самым будут перенумерованы все элементы множества A. При этом будут израсходованы все натуральные числа.

Следовательно, множество положительных несократимых дробей вида $\frac{m}{n}$ счетно.

Этим же способом можно доказать счетность множества $\{M(n, m)\}$ точек плоскости, имеющих координатами натуральные числа.

В десятом классе вы узнаете, что существуют не только счетные множества, но и так называемые несчетные множества, т. е. такие множества, элементы которых нельзя пронумеровать.

Множество положительных рациональных чисел Q_+ есть бесконечное подмножество множества A, так как дроби $\frac{m}{n}$ могут определять одно и то же рациональное число. Например, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\ldots$. Значит, множество Q_+ можно перенумеровать. Для этого запишем множество A в порядке возрастания номеров и вычеркнем повторяющиеся рациональные числа. Оставшееся множество Q_+ перенумеруем в том порядке, как оно записано.

Множество всех рациональных чисел $Q=Q_-\cup\{0\}\cup Q_+$ можно занумеровать, используя тот же прием, что и при нумерации множества целых чисел.

Описанный способ нумерации множества A можно использовать для нумерации различных множеств, например для нумерации множества всех квадратных трехчленов с натуральными коэффициентами $\{ax^2+bx+c \mid a,\ b,\ c\in N\}$.

Каждый трехчлен ax^2+bx+c однозначно определяется своими коэффициентами a, b, c. Возьмем три простых числа 2, 3, 5 и каждому трехчлену поставим в соответствие натуральное число $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$. Ясно, что различным трехчленам будут поставлены в соответствие различные натуральные числа. Расставляя затем элементы множества $\{2^a\cdot 3^b\cdot 5^c \mid a,\ b,\ c\in N\}$ в порядке возрастания и нумеруя их, мы тем самым занумеруем и множество $\{ax^2+bx+c \mid a,\ b,\ c\in N\}$.

Этим же способом можно доказать счетность множества $\{M(n;\ m)\}$ точек плоскости, имеющих координатами натуральные числа. Например, возьмем простые числа 2, 3 и каждой точке $M(n;\ m)$, $n\in N$, $m\in N$, поставим в соответствие натуральное число $2^m\cdot 3^n$. Повторяя предыдущие рассуждения, мы занумеруем все точки плоскости с натуральными координатами, а значит, множество $\{M(n;\ m) \mid n\in N,\ m\in N\}$ счетно.

Выше показано, что множество натуральных чисел и множество рациональных чисел имеют одинаковую мощность. Однако на числовой оси элементы этих множеств расположены с различной плотностью.

Пусть m и n — произвольные натуральные числа и $m<n$, тогда на интервале $(m;\ n)$ может находиться лишь конечное множество натуральных чисел. Например, на интервале (3; 7) расположено множество чисел {4; 5; 6}. Другое дело, если рассматривать интервал $(a;\ b)$, где a и b — рациональные числа. На этом числовом промежутке расположено бесконечное множество рациональных чисел.

Действительно, середина интервала $\frac{a+b}{2}$ — рациональное число. Середины полученных половин $\left(a; \frac{a+b}{2}\right)$ и $\left(\frac{a+b}{2}; b\right)$ также рациональные числа. Это деление мы можем продолжать бесконечно.

Чтобы различать множества по плотности расположения их элементов на числовой оси, математики используют понятия *дискретных* и *плотных* множеств. Так, множество натуральных чисел и различные его подмножества называют дискретными множествами, а множество рациональных чисел называют плотным множеством.

УПРАЖНЕНИЯ

28. Докажите, что следующие множества можно пронумеровать:

а) множество всех рациональных чисел вида $\frac{m}{5^n}$, $m, n \in N$;

б) множество квадратных трехчленов $\{ax^2+bx+c,\ a, b, c \in N\}$.

29. Докажите, что множество точек $(x; y)$ плоскости, где $x, y \in Z$, счетно.

§ 3. НЕРАВЕНСТВА И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

8. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

В пункте 1 во множестве R действительных чисел введено отношение строгого порядка «меньше» и отношение «равенства», с помощью которых мы можем сравнить действительные числа. Поэтому в математике значительное место занимает изучение неравенств.

Некоторые свойства числовых неравенств были указаны в курсах математики 5 и 6 классов. Мы докажем эти свойства. При этом будем использовать следующие свойства положительных чисел:

1) *Сумма $a+b$ и произведение ab двух положительных чисел a и b положительны;*

2) *Число $\frac{1}{a}$, обратное положительному числу a, положительно.*

Кроме того, будем использовать следующее утверждение, непосредственно вытекающее из определений неравенства действительных чисел и операции вычитания:

3) *Неравенство $a<b$ имеет место в том и только в том случае, когда разность $b-a$ положительна, т. е. $b-a>0$.*

Справедливы следующие свойства неравенств:

а) ***Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.***

В самом деле, так как $a<b$ и $b<c$, то $b-a>0$ и $c-b>0$. Но тогда в силу 1) имеем $(c-b)+(b-a)>0$. Так как $(c-b)+(b-a)=c-a$, то $c-a>0$, и потому $a<c$.

б) ***Если $a<b$, то $a+c<b+c$.***

Это утверждение вытекает из того, что $(b+c)-(a+c)=b-a$.

в) ***Если $a<b$ и $c>0$, то $ac<bc$.***

В самом деле, если $a<b$, то $b-a>0$. Поскольку и $c>0$, то в силу утверждения 1) произведение $(b-a)c$ положительно, $(b-a)c>0$. Но $(b-a)c=bc-ac$, и потому $bc-ac>0$. Это и значит, что $ac<bc$.

Итак, *при умножении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства не изменяется.*

г) ***Если $a<b$ и $c<0$, то $ac>bc$.***

В самом деле, имеем $b-a>0$ и $c<0$, а потому произведение $(b-a)c$ отрицательно, $(b-a)c<0$. Но $(b-a)c=bc-ac$, и потому $bc-ac<0$, т. е. $ac-bc>0$. Это и означает, что $ac>bc$.

Итак, *при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства изменяется на противоположный.*

д) ***Если $0<a<b$, то $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.***

В самом деле, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$. Так как по условию $a<b$ и $a>0$, то $\frac{b-a}{ab}>0$, т. е. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$. А это и означает, что $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

Из основных утверждений а) — д) следуют другие свойства неравенств.

е) ***Если $a<b$ и $c<d$, то $a+c<b+d$.*** Иными словами, *при увеличении слагаемых сумма увеличивается.*

В самом деле, из $a<b$ следует в силу б), что $a+c<b+c$. Таким же образом из $c<d$ получаем $b+c<b+d$. Из неравенств $a+c<b+c$ и $b+c<b+d$ в силу а) вытекает, что $a+c<b+d$.

ж) ***Если $0<a<b$ и $0<c<d$, то $0<ac<bd$.***

В самом деле, из $0<a<b$ и $c>0$ следует в силу в), что $ac<bc$. Таким же путем из $0<c<d$ и $b>0$ выводим, что $bc<bd$. Так как $ac<bc$ и $bc<bd$, то в силу а) получаем $ac<bd$.

з) ***Если основание степени положительно, то при его увеличении значение степени увеличивается.*** Иными словами, если $0<a<b$, то $0<a^n<b^n$.

В самом деле, если $0<a<b$, то в силу ж) имеем $0<aa<bb$, т. е. $0<a^2<b^2$. Далее, из $0<a<b$ и $0<a^2<b^2$ получаем, что $0<aa^2<bb^2$, т. е. $0<a^3<b^3$. Продолжая далее таким же образом, убеждаемся, что неравенство $0<a^n<b^n$ верно для всех натуральных значений n.

Утверждения, касающиеся разности и частного, вытекают из утверждений о сумме и произведении, если учесть, что при $a<b$ имеем $-b<-a$, а при $0<a<b$ имеем $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

Например, докажем, что ***если*** $a<b$, $c>d$, ***то*** $a-c<b-d$. В самом деле, из $c>d$ вытекает, что $-c<-d$. А тогда в силу е) получаем, что $a-c<b-d$. Таким же образом доказывают, что ***если*** $0<a<b$, $c>d>0$, ***то*** $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$. Иными словами, *при увеличении положительного числителя и уменьшении положительного знаменателя дробь увеличивается.* Например, $0<3{,}6<4{,}5$, $0<2{,}3<2{,}8$, и потому $\frac{3{,}6}{2{,}8}<\frac{4{,}5}{2{,}3}$.

УПРАЖНЕНИЯ

30. Какие из следующих неравенств верны:

а) $-5<0$; е) $-8{,}52>-8{,}49$; л) $\frac{5}{12}<\frac{1}{2}$;

б) $-7\geqslant-11$; ж) $0{,}0024<-1243$; м) $\frac{3}{17}>0{,}17$;

в) $15\leqslant15$; з) $-0{,}0035>-0{,}00035$; н) $\frac{7}{71}<0{,}35$;

г) $0<-1$; и) $-0{,}0015<0{,}0012$; о) $-\frac{3}{40}<-0{,}075$;

д) $3{,}819<3{,}817$; к) $2\cdot10^6<35\cdot10^5$; п) $\frac{8{,}1}{10^6}<\frac{97}{10^7}$?

31. Какие из нижеследующих чисел неотрицательны и какие положительны:

$-148{,}3$; 215; 0; $|-24{,}1|$; 173,11; $(-311{,}8)^2$; $(-74{,}6)^3$; $|(28)^5|$?

32. Поставьте вместо звездочки знак $<$, $>$ или $=$ так, чтобы получилось верное неравенство:

а) $\frac{22}{7}*\frac{355}{113}$; б) $-3\frac{1}{7}*-3\frac{10}{7}$; в) $0{,}04*\frac{2}{53}$;

г) $3{,}0001*3{,}001$; д) $-0{,}0018*-0{,}0016$.

33. При каких значениях x положительны числа:

а) $|x|$; г) $-x$; ж) $-x-1$; к) $-|x|+16$;
б) $-|x|$; д) $x-4$; з) $-x+5$; л) $|x|-12$;
в) x^2+4; е) $x+1$; и) $-x-10$; м) x^2-49?

34. Как расположены на координатной прямой относительно друг друга точки $A(a)$ и $B(b)$, если:

а) $a-b=-7$; в) $b-a=-1{,}3$;
б) $a-b=30{,}6$; г) $b-a=0$?

35. Запишите неравенство, которое получится, если к обеим частям неравенства $18 > -7$ прибавить число:

а) -5; б) $2{,}7$; в) -18; г) 7.

36. Запишите неравенство, которое получится, если обе части неравенства $-9 < 21$ умножить на число:

а) 2; б) -6; в) $0{,}5$; г) $-\frac{1}{3}$.

37. Запишите неравенство, которое получится, если из обеих частей неравенства $5 > -3$ вычесть число:

а) 2; б) 12; в) -3; г) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$.

38. Запишите неравенство, которое получится, если обе части неравенства $15 > 3$ разделить на:

а) 3; б) -3; в) -1; г) $\left(-\frac{1}{7}\right)^3$.

39. Запишите неравенство, которое получится, если вычесть обе части неравенства $-6 < 11$ из числа:

а) -6; б) 11; в) 15; г) -11; д) 0.

40. Запишите неравенство, которое получится, если разделить на обе части неравенства $3 < 12$ число:

а) 3; б) -12; в) 6; г) $(-6)^7$.

41. Запишите неравенство, которое получится, если разделить на обе части неравенства $-3 < 12$ число:

а) -3; б) 12; в) $(-1)^7$; г) $(-24)^4$.

42. Запишите неравенство, которое получится, если разделить на обе части неравенства $-12 < -3$ число:

а) -3; б) -12; в) $(-3)^5$; г) $(-12)^2$.

43. Запишите четыре неравенства, которые можно вывести из неравенств $3 < 10$ и $2 < 5$.

44. Докажите следующие утверждения:

а) если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$;

б) если $b > a > 0$ и $0 < c < d$, то $\frac{b}{c} > \frac{a}{d}$.

45. Можно ли почленно вычитать неравенства одного и того же смысла (т. е. следует ли из неравенств $a < b$ и $c < d$ неравенство $a - c < b - d$)? Ответ поясните примером.

46. Можно ли почленно делить друг на друга неравенства одного и того же смысла?

47. Всегда ли можно почленно делить друг на друга неравенства противоположного смысла? Какое еще условие надо добавить? Разберите пример неравенств $3<6$, $2>-2$.

48. Известно, что $a<b$. Замените звездочки одним из знаков $>$, $<$, $=$ в записи:

а) $-12{,}7a * -12{,}7b$; в) $\frac{a}{3} * \frac{b}{3}$; д) $0 \cdot a * 0 \cdot b$;

б) $0{,}07a * 0{,}07b$; г) $-\frac{a}{2} * -\frac{b}{2}$; е) $-a * -b$.

49. Положительно или отрицательно число a, если известно, что:

а) $5a<2a$; б) $7a>3a$; в) $-3a<3a$; г) $-12a>-2a$?

50. Известно, что $a<2$. Докажите, что $3a<7$.

51. Известно, что $x>8$. Докажите, что $5x>30$.

52. Известно, что $a+b<4$. Докажите, что $2a+2b<17$.

53. Докажите числовое неравенство:

а) $651+381<425+684$; в) $376 \cdot 859<911 \cdot 584$;
б) $2654-1167<3125-1148$; г) $38\,304:56<38\,335:5$.

54. Расставьте в порядке возрастания числовых значений следующие выражения:

а) $4258+9165$, $10\,278+4281$, $4179+9034$, $9027+4175$; $11\,315+4473$, $4262+9837$;

б) $389 \cdot 743$, $715 \cdot 364$, $737 \cdot 381$, $815 \cdot 425$, $405 \cdot 787$, $805 \cdot 344$;

в) $10\,941-3459$, $10\,738-3615$, $10\,845-3519$, $10\,642-3824$, $10\,695-3741$, $10\,627-3898$;

г) $9216:64$, $9362:62$, $9108:66$, $9961:63$, $9045:67$, $9516:61$.

55. Докажите числовое неравенство:

а) $15\,000<8516+7911<17\,000$; в) $180\,000<956 \cdot 247<300\,000$;
б) $400<875-321<600$; г) $20<648:27<35$.

9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВЕННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Некоторые буквенные неравенства верны при любых значениях входящих в них букв. Например, при всех значениях x верно, что $x^2 \geqslant 0$ (если x положительно или отрицательно, то x^2 положительно, т. е. $x^2>0$, а при $x=0$ и $x^2=0$). Значит, при всех значениях x верны и неравенства $(x-1)^2 \geqslant 0$, $(x^2-8x+1)^2 \geqslant 0$ и т. д.

Пример 1.

Докажем, что при всех значениях a верно неравенство

$$2a^2+8a+3>a(a+8).$$

Решение. Образуем разность левой и правой частей этого неравенства:

$$2a^2+8a+3-a(a+8)=2a^2+8a+3-a^2-8a=a^2+3.$$

Но выражение a^2+3 положительно при всех значениях a как сумма неотрицательного числа a^2 и положительного числа 3. Значит, для всех a имеем $2a^2+8a+3>a(a+8)$.

Пример 2.

Докажем, что при любых значениях x и y верно неравенство $2xy\leqslant x^2+y^2$.

Решение. Образуем разность правой и левой частей этого неравенства: $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$. Так как она неотрицательна при любых значениях x и y, то $2xy\leqslant x^2+y^2$. Заметим, что равенство имеет место лишь в случае, когда $(x-y)^2=0$, т. е. когда $x=y$. Если же $x\neq y$, то $2xy<x^2+y^2$.

Так же как и при доказательстве тождественных равенств, иногда требуется доказать тождественное неравенство при некоторых условиях, налагаемых на переменные, входящие в неравенство.

Пример 3.

Докажем, что $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Решение. Перенеся $8abc$ в левую часть, докажем, что

$$(a+b)(b+c)(c+a)-8abc=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$$

(см. упр. 178, гл. II). Так как правая часть равенства всегда неотрицательна, если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то отсюда и следует верность доказываемого.

УПРАЖНЕНИЯ

56. Докажите, что при всех значениях переменных верно неравенство:

а) $x^2+5>0$;
б) $1+a^2>0$;
в) $(a-3)^2\geqslant 0$;
г) $-p^2-2<0$;
д) $2x^2+7>0$;
е) $3(a+1)+a-4(2+a)<0$;
ж) $m^2+15m+56>m(m+15)$;
з) $(7m-1)(7m+1)<49m^2$;
и) $(2m+3)(2m+1)>4m(m+2)$;
к) $(2m+3)(2m+1)<(2m+2)^2$;
л) $3m(m+6)<(3m+6)(m+4)$;
м) $a(a+b)\geqslant -ab-2b^2$.

57. Докажите, что при любых положительных значениях переменных верно неравенство:

а) $a^2+7a>a(a+6)$;
б) $3a(a+4)+8>a(3a+2)+1$;
в) $x^2+8xy+2y^2>(x+y)(x+2y)$;
г) $(2x+2y)(x+5y)>(x+3y)(2x-5y)$.

58. Докажите справедливость неравенства:

а) $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$, если $a>0$, $b>0$;

б) $\frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x} \geqslant 6$, если $x>0$, $y>0$, $z>0$.

10. СТАНДАРТНАЯ ЗАПИСЬ ЧИСЛА

Любое число, большее или равное 10, можно записать в виде

$$a = b \cdot 10^n, \text{ где } 1 \leqslant b < 10.$$

Например, $476 = 4{,}76 \cdot 10^2$; $9726{,}51 = 9{,}72651 \cdot 10^3$. Если же положительное число a меньше чем 1, то его можно записать в виде

$$a = b \cdot \frac{1}{10^n}, \text{ где } 1 \leqslant b < 10.$$

Например, $0{,}786 = 7{,}86 \cdot \frac{1}{10^1}$; $0{,}008965 = 8{,}965 \cdot \frac{1}{10^3}$. Обычно вместо $\frac{1}{10^n}$ пишут 10^{-n}, так что $0{,}786 = 7{,}86 \cdot 10^{-1}$; $0{,}008965 = 8{,}965 \cdot 10^{-3}$.

Запись числа в виде $a = b \cdot 10^n$ или $a = b \cdot 10^{-n}$, где $1 \leqslant b < 10$, называют **стандартной**. Для чисел a, таких, что $1 \leqslant a < 10$, стандартная запись совпадает с обычной. Иногда при $1 \leqslant a < 10$ вместо a пишут $a \cdot 10^0$.

В 9 классе мы детальнее рассмотрим степени с отрицательными и нулевыми показателями и изучим их свойства. Там будет показано, что для таких степеней остаются верными равенства

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

и другие известные нам свойства степеней.

УПРАЖНЕНИЯ

59. Представьте в стандартном виде число:

а) $10^5 \cdot 10^7$; $10^6 \cdot \frac{1}{10^4}$; $\frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{10^5}$; $10^5 \cdot \frac{1}{10^8}$;

б) 13 000 000; 89 000 000; 75 500 000; 29 680 000;

в) 0,0035; 0,6381; 1,72; 3,149.

60. Запишите в стандартном виде значение выражения:

а) $(2{,}15 \cdot 10^4) \cdot (3{,}2 \cdot 10^4)$;

б) $(4 \cdot 10^4) \cdot (1{,}1 \cdot 10^{12})$;

в) $(1{,}2 \cdot 10^5) : (4 \cdot 10^3)$;

г) $(8{,}52 \cdot 10^7) : (7{,}1 \cdot 10^3)$;

д) $(9{,}8596 \cdot 10^2) : (3{,}14 \cdot 10^9)$;

е) $(5{,}7 \cdot 10^3)^2$.

61. Луч света за 1 с пробегает расстояние $2{,}998 \cdot 10^5$ км. В году $3{,}156 \cdot 10^7$ с. Какое расстояние пробегает световой луч за год (это расстояние называют *световым годом*)?

62. Туманность Андромеды удалена от нас на $2{,}3 \cdot 10^6$ световых лет. Сколько километров до нее?

63. В 32 г кислорода содержится $6{,}06 \cdot 10^{23}$ молекул. Сколько молекул содержится в 1 кг кислорода?

64. Длина прямоугольника равна $2{,}5 \cdot 10^3$ мм, а его ширина — $2{,}2 \cdot 10^3$ мм. Чему равна площадь прямоугольника?

65. Представьте в десятичной записи число:

а) $2{,}3 \cdot 10^4$; б) $1{,}05 \cdot 10^7$; в) $8{,}12 \cdot \frac{1}{10^3}$; г) $1{,}45 \cdot \frac{1}{10^2}$.

11. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИН

При измерении длин отрезков и площадей фигур, при взвешивании тел и других измерениях получаются числа, выражающие эти величины. Ввиду погрешностей измерения полученные числа являются приближенными значениями измеряемой величины.

Пусть истинное значение измеряемой величины равно x, а измерение дало результат a. Разность $x-a$ называют **абсолютной погрешностью** измерения. Значение абсолютной погрешности чаще всего неизвестно, но обычно известна ее оценка сверху — например, при измерении длины отрезка линейкой с сантиметровыми делениями абсолютная погрешность измерения не превышает 1 см, а при взвешивании на весах с гирями 100 г, 200 г, 500 г и 1 кг абсолютная погрешность взвешивания не превышает 100 г.

Число h называют **границей абсолютной погрешности измерения**, если выполняется неравенство $|x-a| \leqslant h$, т. е. истинное значение измеряемой величины лежит между $a-h$ и $a+h$:

$$a-h \leqslant x \leqslant a+h.$$

Принято писать в этом случае $x = a \pm h$, хотя, конечно, значение x может быть отлично и от $a-h$, и от $a+h$. В этом случае говорят, что при данном измерении x равно a с точностью до h.

Пример 1.

Укажем границы для x, если $a=3{,}47$ и $h=0{,}02$, т. е. $x = 3{,}47 \pm 0{,}02$.

Решение. Имеем $a-h=3{,}45$ и $a+h=3{,}49$, а потому $3{,}45 \leqslant x \leqslant 3{,}49$.

Пример 2.

Пусть $89{,}1 \leqslant x \leqslant 89{,}7$. Найдем значения a и h.

Решение. Так как $a-h=89{,}1$, $a+h=89{,}7$, то $a = \frac{89{,}1+89{,}7}{2} = 89{,}4$ и $h = 89{,}7-89{,}4 = 0{,}3$.

На производстве границы, между которыми лежит диаметр круглого стержня, находят с помощью двух отверстий. Если изготавливают стержень диаметром 50 мм, то он должен свободно входить в отверстие диаметром 50,1 мм и застревать в отверстии диаметром

49,9 мм,— тогда $49{,}9 < x < 50{,}1$. Таким же образом с помощью двух измеряющих стержней определяют правильность диаметра высверленного отверстия.

С приближенными значениями чисел приходится иметь дело при вычислениях. Например, длина окружности выражается формулой $C = 2\pi R$, где R — радиус окружности, а $\pi = 3{,}141592\ldots$. На практике округляют значение π до 3,14 или до 3,1416 в зависимости от того, с какой точностью измерен радиус окружности. Разность между числом x и его приближенными значениями называют *абсолютной погрешностью приближения*. Число h, такое, что $|x - a| \leqslant h$ называют *границей абсолютной погрешности приближения*.

Принято записывать приближенные значения так, чтобы абсолютная погрешность не превышала единицы последнего десятичного знака. Например, запись $x \approx 68{,}91$ означает, что $x = 68{,}91 \pm 0{,}01$, т. е. что $68{,}90 \leqslant x \leqslant 68{,}92$. Отличаются друг от друга записи $x \approx 68{,}91$ и $x \approx 68{,}9100$ — в первом случае $h = 0{,}01$, а во втором $h = 0{,}0001$, т. е. в первом случае $68{,}90 \leqslant x \leqslant 68{,}92$, а во втором $68{,}9099 \leqslant x \leqslant 68{,}9101$.

Если стандартная запись числа x имеет вид $x = a \cdot 10^n$, то количество десятичных знаков в a называют *числом значащих цифр* в x. Например, в числе $0{,}0024 = 2{,}4 \cdot 10^{-3}$ две значащие цифры, а в числе $309\,100\,000 = 3{,}091 \cdot 10^8$ четыре значащие цифры.

УПРАЖНЕНИЯ

66. При измерении расстояния от Земли до Луны оказалось, что оно равно $380\,000 \pm 500$ км. В каких границах лежит это расстояние? Может ли оно равняться 386 000 км? А 380 245 км?

67. При измерении температуры воды оказалось, что она находится в пределах от 8,65 до 8,71 °С. Какова абсолютная погрешность этого измерения?

68. Найдите абсолютные погрешности приближения числа $\frac{1}{3}$ числами 0,3; 0,33; 0,333; 0,4; 0,34; 0,334.

69. Является ли число 3,14 приближенным значением для π с точностью до: 0,1; 0,01; 0,001?

70. Пусть $x = 9{,}6 \pm 0{,}4$. Какие из указанных ниже значений может принимать x: 9,71; 9,99; 9,15; 10,1; 8,98?

71. Пусть $x = a \pm 0{,}2$. Какие из указанных ниже значений может принимать a: 7,8; 8,01; 7,61; 7,94, если более точное измерение показало, что $x = 7{,}84 \pm 0{,}001$?

12. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

Ошибка в измерении на 1 см велика, если измеряется радиус шарикоподшипника, равный 4 см, и мала, если измеряется длина поля,

равная 200 м. В первом случае ошибка составляет $\frac{1}{4}$ измеряемой величины, а во втором — $\frac{1}{20000}$ этой величины.

Относительной погрешностью измерения называют отношение абсолютной погрешности этого измерения к результату измерения. При измерении радиуса шарикоподшипника относительная погрешность измерения равнялась $\frac{1}{4}$, т. е. 25%, а при измерении длины поля она равнялась $\frac{1}{20000}$, т. е. 0,005%. Абсолютная погрешность обоих измерений была одной и той же: 1 см. Чем меньше относительная погрешность измерения, тем оно точнее.

Пример 1.

При взвешивании тела получен результат $387{,}5 \pm 0{,}2$. Найдем относительную погрешность измерения.

Решение. Относительная погрешность измерения равна

$$\frac{0{,}2}{387{,}5} = 0{,}0005161.$$

На практике округляют относительную погрешность по избытку до одной или двух значащих цифр. В нашем примере считают, что измерение выполнено с относительной погрешностью 0,0006 (или 0,06%).

Пример 2.

Измерение объема жидкости дало результат 1,82 л, причем относительная погрешность измерения равна 0,005. Найдем абсолютную погрешность этого измерения и границы, между которыми лежит измеряемая величина.

Решение. По условию имеем $\frac{h}{1{,}82} = 0{,}005$, и потому $h = 0{,}0091$.

Поэтому

$$1{,}82 - 0{,}0091 \leqslant x \leqslant 1{,}82 + 0{,}0091.$$

Округлим найденную абсолютную погрешность по избытку до $h = 0{,}01$ и запишем $1{,}81 \leqslant x \leqslant 1{,}83$ или $x = 1{,}82 \pm 0{,}01$.

УПРАЖНЕНИЯ

72. Выполняя лабораторную работу по определению ускорения свободного падения, ученик получил результат 10,1 м/с^2. Вычислите допущенную им относительную погрешность измерения, если в данном месте по таблицам $g = 9{,}81$ м/с^2.

73. Пусть $x = 38{,}1 \pm 0{,}05$. Вычислите относительную погрешность измерения, округлив ее с избытком:

а) с одной значащей цифрой;
б) с двумя значащими цифрами.

74. Скорость света в вакууме, измеренная с точностью до 4 км/с, оказалась равной 299 796 км/с. Найдите относительную погрешность этого измерения, округлив ее до одной значащей цифры.

75. Измерение массы железнодорожного вагона дало результат $m = 63 \pm 0{,}5$ т, а массы лекарства — результат $m = 0{,}15 \pm 0{,}005$ мг. Какое измерение выполнено точнее?

76. Прибор выполняет измерение с относительной погрешностью 0,1%. В результате измерения этим прибором некоторой величины получили результат 714. В каких границах лежит точное значение величины (округлите ответ до одной значащей цифры в погрешности)?

77. В результате измерения напряжения электрического тока вольтметром получили результат $511 \pm 0{,}5$ В. Превосходит ли относительная погрешность измерения число 0,001?

13. ОЦЕНКА СУММЫ И РАЗНОСТИ

Установление границ, между которыми лежит значение данного числового выражения, называют **оценкой** этого выражения. Оценка выражений производится на основании доказанных в п. 1 свойств неравенств.

Начнем с оценки суммы. Пусть $x = a \pm h$ и $y = b \pm k$. Это означает, что $a - h \leqslant x \leqslant a + h$ и $b - k \leqslant y \leqslant b + k$. Отсюда в силу свойства е) из п. 7 вытекает, что

$$(a - h) + (b - k) \leqslant x + y \leqslant (a + h) + (b + k),$$

т. е.

$$(a + b) - (h + k) \leqslant x + y \leqslant (a + b) + (h + k). \qquad (1)$$

Неравенства (1) показывают, что $x + y = a + b \pm (h + k)$, т. е. приближенное значение суммы равно $a + b$, а абсолютная погрешность этого значения равна $h + k$ — сумме абсолютных погрешностей слагаемых.

Итак, **при сложении приближенных значений их абсолютные погрешности складываются.**

Пример 1.

Масса одного мешка пшеницы равна $64 \pm 0{,}5$ кг, а масса другого мешка пшеницы — 57 ± 1 кг. Чему равна масса обоих мешков вместе?

Решение. Приближенное значение суммарной массы равно $64 + 57 = 121$ (кг). Погрешность составляет $0{,}5 + 1 = 1{,}5$ (кг). Значит, суммарная масса равна $121 \pm 1{,}5$ кг.

Тот же результат можно получить непосредственно из того, что по условию имеем $64 - 0{,}5 \leqslant x \leqslant 64 + 0{,}5$ и $57 - 1 \leqslant y \leqslant 57 + 1$, а потому

$$(64-0{,}5)+(57-1)\leqslant x+y\leqslant(64+0{,}5)+(57+1),$$

т. е.

$$64+57-(0{,}5+1)\leqslant x+y\leqslant 64+57+(0{,}5+1).$$

Сразу видим, что приближенное значение массы равно $64+57$, т. е. 121 кг, а абсолютная погрешность равна $0{,}5+1=1{,}5$ (кг).

Отметим без доказательства, что *относительная погрешность суммы положительных слагаемых не превосходит наибольшей из относительных погрешностей слагаемых.*

Абсолютная погрешность разности равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого. Иными словами, если $x=a\pm h$ и $y=b\pm k$, то $x-y=a-b\pm(h+k)$. В самом деле, по условию имеем

$$a-h\leqslant x\leqslant a+h \text{ и } b-k\leqslant y\leqslant b+k.$$

Но тогда по свойству г) из п. 8

$$-(b+k)\leqslant -y\leqslant -(b-k),$$

т. е. $-b-k\leqslant -y\leqslant -b+k$. Из неравенств

$$a-h\leqslant x\leqslant a+h \text{ и } -b-k\leqslant -y\leqslant -b+k$$

вытекает, что

$$(a-h)+(-b-k)\leqslant x-y\leqslant(a+h)+(-b+k),$$

т. е.

$$(a-b)-(h+k)\leqslant x-y\leqslant(a-b)+(h+k),$$

или

$$x-y=a-b\pm(h+k).$$

Однако разность мало отличающихся друг от друга положительных чисел значительно меньше обоих чисел, а потому относительная погрешность может оказаться больше, чем для уменьшаемого и вычитаемого. Например, если $x=28{,}9\pm 0{,}1$ и $y=28{,}1\pm 0{,}1$, то имеем $x-y=0{,}8\pm 0{,}2$. Относительная погрешность уменьшаемого и вычитаемого не превосходит $\frac{0{,}1}{28}\approx 0{,}0036\approx 0{,}004$. А для разности она равна $\frac{0{,}2}{0{,}8}=0{,}25$. Таким образом, при вычитании относительная погрешность увеличилась более чем в 60 раз.

Пример 1.

Найдем площадь сечения круглой трубы, если ее внутренний радиус равен r, а толщина стенок равна d.

Решение. Площадь кольца на рисунке 29 выражается формулой

$$S=\pi(r+d)^2-\pi r^2. \qquad (2)$$

Обычно толщина стенок d мала, и потому $\pi(r+d)^2$ и πr^2 мало отличаются друг от друга. Поэтому преобразуем формулу (2), вынеся за

скобки π, и применим формулу для разности квадратов. Получим

$$S=\pi(2r+d)\cdot d. \qquad (3)$$

Здесь уже нет вычитания близких друг другу чисел, эта формула дает меньшую ошибку при вычислениях.

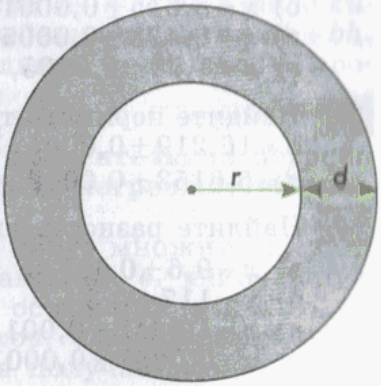


Рис. 29

Если абсолютная погрешность k слагаемого y значительно меньше абсолютной погрешности h слагаемого x (например, $h=0{,}1$, $k=0{,}001$), то абсолютная погрешность суммы $x+y$ почти равна h. Отсюда следует, что если, например, $x=67{,}8\pm0{,}1$ и $y=9{,}5081\pm0{,}0001$, то сумма известна примерно с точностью до 0,1, а потому в ней цифры сотых, тысячных и десятитысячных совершенно ненадежны. Поэтому надо еще до сложения округлить слагаемое 9,5081. Чтобы ошибка округления не дала большой добавочной погрешности, округлим это слагаемое не до десятых, а до сотых. Имеем $x+y=67{,}8+9{,}51=77{,}31$, причем абсолютная погрешность мало отличается от 0,1. Округление ответа до десятых увеличит ее еще на 0,05. Значит, $x+y=77{,}3\pm0{,}15$.

Итак, при сложении чисел, имеющих различную абсолютную погрешность, надо выбрать слагаемое, для которого эта погрешность самая большая, и округлить остальные слагаемые так, чтобы в них было на один знак после запятой больше, чем в выбранном слагаемом. После этого складывают полученные значения и округляют ответ, оставляя в нем столько цифр после запятой, сколько их в выбранном слагаемом. Если число слагаемых невелико, то в полученном ответе все цифры, кроме последней, будут надежными, а последняя цифра ненадежна на 2—3 единицы.

Пример 2.

Найдем приближенное значение суммы $75{,}4+8{,}9572+81{,}264$.

Решение. Меньше всего знаков после запятой у первого слагаемого — у него ненадежна лишь цифра десятых. Поэтому округлим остальные слагаемые до сотых и после сложения округлим ответ до десятых: $75{,}4+8{,}9572+81{,}264\approx75{,}4+8{,}96+81{,}26=165{,}62\approx165{,}6$.

Поскольку в настоящее время арифметические операции обычно выполняют на калькуляторе или компьютере, этим правилом не пользуются, а учитывают лишь погрешность получившегося ответа.

УПРАЖНЕНИЯ

78. Найдите сумму чисел x и y, если:

а) $x=5{,}387\pm0{,}0005$, $y=6{,}915\pm0{,}0005$;

б) $x=8{,}615\pm0{,}0001$, $y=3{,}219\pm0{,}0001$;
в) $x=0{,}473\pm0{,}0005$, $y=0{,}2961\pm0{,}00005$;
г) $x=1{,}66\pm0{,}0005$, $y=0{,}9835\pm0{,}0001$.

79. Найдите периметр трапеции, если известны длины ее сторон (в м): $a=16{,}219\pm0{,}0005$, $b=6{,}818\pm0{,}001$, $c=8{,}3156\pm0{,}0001$, $d=5{,}6153\pm0{,}0002$.

80. Найдите разность чисел x и y, если:

а) $x=9{,}6\pm0{,}1$, $y=3{,}3\pm0{,}1$;
б) $x=117\pm0{,}5$, $y=98{,}6\pm0{,}1$;
в) $x=10{,}442\pm0{,}001$, $y=5{,}42\pm0{,}005$;
г) $x=0{,}0267\pm0{,}0001$, $y=0{,}008\pm0{,}0005$.

81. Вычислите значение выражения $x+y-z-t$, если $x=9{,}674\pm0{,}0001$, $y=5{,}317\pm0{,}0005$, $z=11{,}316\pm0{,}001$, $t=2{,}6193\pm0{,}0001$.

82. Объем дерева с корой $0{,}36\pm0{,}005$ м^3. Объем снятой коры равен $0{,}042\pm0{,}001$ м^3. Каков объем полезной древесины?

14. ОЦЕНКА ПРОИЗВЕДЕНИЯ, СТЕПЕНИ И ЧАСТНОГО

Пусть $x=a\pm h$ и $y=b\pm k$, причем числа $a-h$ и $b-k$ положительны. Найдем приближенное значение произведения xy и оценим его абсолютную погрешность. Имеем

$$0<a-h\leqslant x\leqslant a+h \text{ и } 0<b-k\leqslant y\leqslant b+k.$$

Отсюда (в силу свойства неравенств ж) из п. 8) вытекают неравенства

$$(a-h)(b-k)\leqslant xy\leqslant(a+h)(b+k).$$

Раскрывая скобки, получаем

$$ab-ak-bh+hk\leqslant xy\leqslant ab+ak+bh+hk.$$

Если заменить в левой части hk на $-hk$, выражение еще уменьшится и мы получим

$$ab-ak-bh-hk\leqslant xy\leqslant ab+ak+bh+hk,$$

т. е.

$$ab-(ak+bh+hk)\leqslant xy\leqslant ab+(ak+bh+hk).$$

Отсюда следует, что приближенное значение произведения xy равно ab, причем абсолютная погрешность соответствует $ak+bh+hk$.

Обычно измерения делают достаточно точными, и потому h мало по сравнению с a, k мало по сравнению с b. Но тогда произведение hk мало по сравнению с $ak+bh$ (например, если $a=27{,}4$, $h=0{,}1$, $b=3{,}84$, $k=0{,}01$, то $hk=0{,}001$ и $ak+bh=0{,}658$). Поэтому обычно отбрасывают hk и считают, что абсолютная погрешность произведения равна $ak+bh$.

Итак, *если* $x=a\pm h$ *и* $y=b\pm k$, *причем числа* $a-h$ *и* $b-k$ *положительны, то абсолютная погрешность произведения* ab *равна* $ak+bh$.

Разделив $bh+ak$ на ab, получаем относительную погрешность произведения. Она равна $\frac{bh+ak}{ab}=\frac{h}{a}+\frac{k}{b}$. Но $\frac{h}{a}$ и $\frac{k}{b}$ — относительные погрешности множителей. Мы доказали, что **относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей множителей.**

Если надо умножить несколько чисел, то берут множитель, имеющий меньше всего верных десятичных знаков (т. е. наибольшую относительную погрешность), и округляют остальные множители, сохраняя в них столько же десятичных знаков, что и в выбранном, или на один знак больше. После умножения получается обычно на 1—2 верных знака меньше, чем в выбранном множителе.

Пример 1.

Найдем длину окружности, если ее радиус R равен 89,56 см.

Решение. Длина окружности выражается формулой $C=2\pi R$. Так как радиус имеет 4 верных десятичных знака, то и $2\pi=6{,}2831852\ldots$ округляем до 4 десятичных знаков: $2\pi\approx 6{,}283$, и длина окружности приближенно равна $6{,}283\cdot 89{,}56=562{,}70548$ (см). По формуле $bh+ak$ для абсолютной погрешности произведения находим, что она не превосходит $7\cdot 0{,}001+90\cdot 0{,}01=0{,}907<1$. Поэтому пишем ответ так: $C=563\pm 1$.

Так как возведение в степень с натуральным показателем n сводится к умножению n одинаковых множителей, то имеем:

Относительная погрешность степени равна относительной погрешности основания степени, умноженной на показатель степени.

Пример 2.

Вычислим объем куба со стороной 42,7 см и найдем относительную и абсолютную погрешности ответа.

Решение. Объем равен $42{,}7^3=77854{,}483$ (см^3). Относительная погрешность значения 42,7 равна $\frac{0{,}1}{42{,}7}<0{,}0025$. Значит, относительная погрешность степени не больше чем $0{,}0025\cdot 3=0{,}0075$. Но тогда абсолютная погрешность степени не превосходит $80\,000\cdot 0{,}0075=600$. Значит, надежны лишь первые две цифры, т. е. $V=78\,000$ см^3. Ответ можно записать в виде $V=77\,900\pm 600$ см^3.

Наконец, отметим, что **относительная погрешность частного равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя.**

Пример 3.

Длина беговой дорожки равна $400\pm 0{,}5$ м. Бегун пробежал это расстояние за $47{,}8\pm 0{,}1$ с. С какой скоростью он пробежал эту дистанцию и какова абсолютная погрешность определения скорости?

Решение. Скорость бега равна $400:47{,}8\approx 8{,}3682$ (м/с). Относительная погрешность делимого составляет $\frac{0{,}5}{400}=0{,}00125<0{,}0013$, а относительная погрешность делителя не больше чем $\frac{0{,}1}{47{,}8}<0{,}0021$. Поэтому относительная погрешность частного не превосходит $0{,}0013+0{,}0021=0{,}0034$, а его абсолютная погрешность не больше чем $0{,}0034\cdot 8{,}4<0{,}03$. Скорость бега равна $8{,}37\pm 0{,}03$ м/с, т. е. она измерена с точностью до 3 см/с. Мы получили в ответе лишь два верных знака, а именно 8,3 — на один знак меньше, чем в числах, данных в условии задачи.

УПРАЖНЕНИЯ

83. Докажите неравенство $\left(\text{при } 0<k<\frac{b}{10},\ h>0,\ a>0\right)$

$$\left|\frac{a+h}{b-k}-\frac{a}{b}\right|<\frac{bh+ak}{0{,}9b^2}.$$

84. Учащийся, вычисляя значение выражения

$$6{,}89\cdot 9{,}51+3{,}96\cdot 5{,}07+4{,}96\cdot 9{,}17,$$

получил ответ 152,3679. Проверьте с помощью оценки выражения, правилен ли этот ответ.

85. Успеет ли рабочий сделать за семичасовой рабочий день 16 деталей, каждую из которых надо обрабатывать по 15,25 мин, и 23 детали, каждую из которых надо обрабатывать 10,15 мин? Успеет ли он выполнить этот заказ, если потратит 45 мин на изготовление приспособления, позволяющего обрабатывать детали первого вида за 12,7 мин, а детали второго вида за 7,75 мин?

86. Пусть $3<a<4$, $4<b<5$. Найдите границы, между которыми лежит выражение:

а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$.

87. Пусть $6\leqslant x\leqslant 7$ и $10\leqslant y\leqslant 12$. Оцените значение выражения:

а) $x+y$; б) $x-y$; в) $y-x$; г) xy; д) $\frac{x}{y}$; е) $\frac{y}{x}$.

88. Пусть $5<m<6$ и $1<n<2$. Покажите, что

$$11<2m+n<14 \text{ и } 1<m-2n<4.$$

89. Пусть $6\leqslant c\leqslant 7$ и $2\leqslant d\leqslant 3$. Покажите, что

$$24\leqslant c(d+2)\leqslant 35 \text{ и } 2\leqslant\frac{c}{d}\leqslant 3{,}5.$$

90. Найдите границы, между которыми лежит выражение:

а) $3a+7b$, если $1{,}2<a<1{,}4$ и $0{,}2<b<0{,}4$;

б) $\frac{a}{2}+0{,}6b$, если $-3<a<-2$ и $0{,}5<b<1$;

в) b^2-ab, если $3<a<4$ и $5<b<6$;

г) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, если $0{,}1<a<0{,}2$ и $0{,}4<b<0{,}5$.

91. При измерении линейкой длин основания и боковой стороны равнобедренного треугольника оказалось, что $26<a<28$ и $41<b<43$ (в мм). Укажите границы, между которыми лежит периметр треугольника.

92. При измерении линейкой длин сторон прямоугольника оказалось, что $42<a<43$ и $84<b<85$ (в мм). Найдите границы, между которыми лежит площадь прямоугольника.

93. Измерение длин верхнего и нижнего оснований трапеции показало, что $3{,}4<a<3{,}5$ и $6{,}2<c<6{,}3$ (в мм). Укажите границы, между которыми лежит длина средней линии трапеции.

94. Можно ли перевезти на трехтонном грузовике за один рейс 14 плит, если они весят по m кг каждая, причем $260<m<270$, и не допускается перегрузка больше 500 кг?

95. Можно ли перевезти за один рейс на пятитонном грузовике 3 плиты, весящие по m кг каждая, и 8 плит, весящих по n кг каждая, если $270<m<1030$, $245<n<255$ и не допускается перегрузка свыше 800 кг?

96. В треугольнике ABC измерены величины двух углов, причем оказалось, что $58^\circ<\angle ABC<59^\circ$ и $102^\circ<\angle BCA<103^\circ$. В каких границах лежит величина угла CAB?

97. Укажите границы, между которыми лежит значение выражения:

а) $689\cdot 315+94\cdot 314$;
б) $76^2+86^2+96^2$;
в) $958\cdot 511-349\cdot 257$;
г) 99^2-37^2;
д) $41\,496:56-11\,892:46$;
е) $69\cdot 84+3230:34$.

98. Прикиньте, какие из следующих равенств заведомо ложны:

а) $845\cdot 216+384\cdot 512=379\,128$;
б) $912\cdot 87+615\cdot 49=793\,930$;
в) $7\cdot 511\cdot 387+8954\cdot 219=486\,763$;
г) $243\,697:643=3709$;
д) $4\,447\,888:68=641$;
е) $166\,419:45{,}1=369$.

15*. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ

При вычислениях с приближенными числами применяют формулы, дающие возможность быстро найти приближенный ответ.

Пусть числа α и β по модулю малы по сравнению с единицей (скажем, $\alpha=0{,}0027$ и $\beta=-0{,}0061$). Тогда произведение $\alpha\beta$ мало по сравнению с $|\alpha|$ и $|\beta|$, поэтому

$$(1+\alpha)(1+\beta)=1+\alpha+\beta+\alpha\beta\approx 1+\alpha+\beta.$$

Итак, *при малых значениях* α *и* β *верна приближенная формула*

$$(1+\alpha)(1+\beta)\approx 1+\alpha+\beta. \qquad (1)$$

Пример 1.

Вычислим произведение:
а) $1{,}0024\cdot 1{,}0031$; б) $1{,}0078\cdot 0{,}9966$; в) $0{,}9937\cdot 0{,}9949$.
Решение. а) Здесь $\alpha=0{,}0024$, $\beta=0{,}0031$. Поэтому по формуле (1) имеем $1{,}0024\cdot 1{,}0031\approx 1+0{,}0024+0{,}0031=1{,}0055$.
б) Здесь $\alpha=0{,}0078$, $\beta=-0{,}0034$. Значит,

$$1{,}0078\cdot 0{,}9966\approx 1+0{,}0078-0{,}0034=1{,}0044.$$

в) Здесь $\alpha=-0{,}0063$, $\beta=-0{,}0051$. Имеем в результате 0,9886.

Если в формуле (1) положить $\alpha=\beta$, получим

$$(1+\alpha)^2\approx 1+2\alpha. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что если $|b|$ мал по сравнению с $|a|$, то

$$(a+b)^2\approx a^2+2ab. \qquad (2')$$

В самом деле, $(a+b)^2=\left(a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^2=a^2\left(1+\frac{b}{a}\right)^2\approx a^2\left(1+\frac{2b}{a}\right)=a^2+2ab.$

Пример 2.

Найдем значение: а) $1{,}0039^2$; б) $0{,}9964^2$; в) $5{,}21^2$.
Решение. а) Здесь $\alpha=0{,}0039$. Поэтому

$$1{,}0039^2\approx 1+2\cdot 0{,}0039=1+0{,}0078=1{,}0078.$$

б) Здесь $\alpha=-0{,}0036$. Поэтому

$$0{,}9964^2\approx 1-2\cdot 0{,}0036=1-0{,}0072=0{,}9928.$$

в) Здесь $a=5$, $b=0{,}21$. Поэтому

$$5{,}21^2\approx 5^2+2\cdot 5\cdot 0{,}21=25+2{,}1=27{,}1.$$

Формула, аналогичная (1), верна и для большего числа множителей. Например, при малых α, β, γ

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\approx 1+\alpha+\beta+\gamma,$$

и потому

$$(1+\alpha)^3\approx 1+3\alpha. \qquad (3)$$

Вообще, если α_1, α_2, ..., α_n малы по сравнению с 1, то

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_n)\approx 1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n, \qquad (4)$$

и потому

$$(1+\alpha)^n\approx 1+n\alpha. \qquad (5)$$

Однако при больших значениях n на результат начинают влиять отброшенные слагаемые, и формула применима лишь при весьма малых значениях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Например, по формуле (5) имеем

$$1{,}001^{1000} \approx 1 + 1000 \cdot 0{,}001 = 1 + 1 = 2.$$

На самом же деле $1{,}001^{1000} \approx 2{,}7156$.

Пример 3.

Найдем значение: а) $1{,}072^5$; б) $0{,}975^4$.

Решение. а) Здесь $\alpha = 0{,}072$, $n = 5$. Значит,

$$1{,}072^5 \approx 1 + 5 \cdot 0{,}072 = 1{,}36.$$

б) Здесь $\alpha = -0{,}025$, $n = 4$. Значит, $0{,}975^4 \approx 1 - 4 \cdot 0{,}025 = 0{,}9$.

Теперь докажем приближенную формулу

$$\frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha, \qquad (6)$$

которая тоже применима лишь в случае, когда $|\alpha|$ мал по сравнению с единицей. Чтобы доказать ее, заметим, что

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{1-\alpha^2+\alpha^2}{1+\alpha} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha}.$$

Но $1 - \alpha^2 = (1+\alpha)(1-\alpha)$, и потому

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{1+\alpha}.$$

Поскольку $|\alpha|$ мал по сравнению с единицей, α^2 мало по сравнению с $|\alpha|$, и потому

$$\frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha.$$

Пример 4.

Найдем приближенное значение для: а) $\dfrac{1}{1{,}0015}$; б) $\dfrac{1}{0{,}9987}$.

Решение. а) Имеем $\alpha = 0{,}0015$, и потому

$$\frac{1}{1{,}0015} \approx 1 - 0{,}0015 = 0{,}9985.$$

б) Имеем $\alpha = -0{,}0013$, и потому $\dfrac{1}{0{,}9987} \approx 1 - (-0{,}0013) = 1{,}0013$.

Из формулы (6) вытекает, что если $|b|$ мал по сравнению с $|a|$, то

$$\frac{1}{a+b} \approx \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}. \qquad (7)$$

В самом деле, имеем

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a\left(1+\frac{b}{a}\right)}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{b}{a}}\approx\frac{1}{a}\left(1-\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}.$$

Пример 5.

Найдем приближенное значение для $\frac{1}{10{,}24}$.

Решение. Имеем $a=10$, $b=0{,}24$. Значит,

$$\frac{1}{10{,}24}\approx\frac{1}{10}-\frac{0{,}24}{10^2}=0{,}1-0{,}0024=0{,}0976.$$

Пример 6.

Найдем приближенное значение выражения

$$(1{,}0036^{10}+0{,}9925^8):(1{,}0024^5+1{,}0032^3).$$

Решение. Имеем

$$1{,}0036^{10}\approx1+10\cdot0{,}0036=1{,}036,\ 0{,}9925^8\approx1-8\cdot0{,}0075=0{,}94.$$

Поэтому $1{,}0036^{10}+0{,}9925^8\approx1{,}976$. Далее,

$$1{,}0024^5\approx1+5\cdot0{,}0024=1{,}012,\ 1{,}0032^3\approx1+3\cdot0{,}0032=1{,}0096,$$

и потому $1{,}0024^5+1{,}0032^3\approx2{,}0216$. Значит,

$$(1{,}0036^{10}+0{,}9925^8):(1{,}0024^5+1{,}0032^3)\approx1{,}976:2{,}0216=$$
$$=0{,}988:1{,}0108\approx0{,}988\cdot0{,}9892\approx1-0{,}012-0{,}0108=1-0{,}0228=$$
$$=0{,}9772.$$

Более точное значение данного выражения равно 0,9975636.

§ 4. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ И ИХ СВОЙСТВА

16. КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ ЧИСЛА

Зная время t, можно найти путь при свободном падении по формуле: $S=4{,}9t^2$. Решим обратную задачу.

Задача.

Сколько секунд будет падать камень, сброшенный с высоты 122,5 м?

Чтобы найти ответ, нужно решить уравнение $4{,}9t^2=122{,}5$. Из него находим, что $t^2=25$. Теперь осталось найти такое положительное

число t, что его квадрат равняется 25. Этим числом является 5, так как $5^2=25$. Значит, камень будет падать 5 с.

Искать положительное число по его квадрату приходится и при решении других задач, например при отыскании длины стороны квадрата по его площади. Введем следующее определение:

Определение. Неотрицательное число, квадрат которого равен неотрицательному числу a, называется *квадратным корнем из a*. Это число обозначают $\sqrt{a}$.

Таким образом, $(\sqrt{a})^2=a$, $\sqrt{a}\geqslant 0$ и $a\geqslant 0$.

Пример. Так как $0^2=0$, $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$,

то $\sqrt{0}=0$, $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$.

Из отрицательных чисел нельзя извлекать квадратные корни, так как квадрат любого числа или положителен, или равен нулю. Например, выражение $\sqrt{-25}$ не имеет числового значения.

В записи $\sqrt{a}$ знак $\sqrt{\ }$ называют **знаком радикала***, а число a — *подкоренным числом*. Например, в записи $\sqrt{25}$ подкоренное число равно 25. Так как $(10^n)^2=10^{2n}$, то $\sqrt{10^{2n}}=10^n$. Это означает, что квадратный корень из числа, записанного единицей и $2n$ нулями, равен числу, записываемому единицей и n нулями:

$$\sqrt{\underbrace{100\ldots0}_{2n\text{ нулей}}\ldots0}=\underbrace{100\ldots0}_{n\text{ нулей}}.$$

Аналогично доказывается, что $\sqrt{\underbrace{0{,}00\ldots0}_{2n\text{ нулей}}\ldots01}=\underbrace{0{,}0\ldots0}_{n\text{ нулей}}1$.

Например,

$\sqrt{10000}=100$, $\sqrt{1000000}=1000$, $\sqrt{0{,}0001}=0{,}01$, $\sqrt{0{,}000001}=0{,}001$.

УПРАЖНЕНИЯ

99. Докажите, что:

а) $\sqrt{121}=11$; б) $\sqrt{400}=20$; в) $\sqrt{0{,}25}=0{,}5$; г) $\sqrt{0{,}09}=0{,}3$.

100. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{49}$; в) $\sqrt{100}$; д) $\sqrt{2500}$;

б) $\sqrt{16}$; г) $\sqrt{1000000}$; е) $\sqrt{90000}$;

*) От латинского «радикс» — корень.

ж) $\sqrt{0{,}01}$; к) $\sqrt{0{,}16}$; н) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$;

з) $\sqrt{0{,}000001}$; л) $\sqrt{0{,}04}$; о) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$;

и) $\sqrt{0{,}81}$; м) $\sqrt{\frac{25}{4}}$; п) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$.

101. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{16}$; г) $\sqrt{0{,}04}-\sqrt{0{,}01}$; ж) $0{,}1\sqrt{49}+0{,}2\sqrt{1600}$;

б) $\sqrt{81}:\sqrt{100}$; д) $3\sqrt{9}$; з) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}36}+\frac{1}{5}\sqrt{900}$.

в) $\sqrt{0{,}09}+\sqrt{0{,}25}$; е) $-7\sqrt{0{,}01}$;

102. Вычислите:

а) $\sqrt{16}+\sqrt{\frac{4}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{4}{9}}-\sqrt{\frac{1}{9}}$; в) $\sqrt{\frac{36}{49}}+\sqrt{100}$; г) $\sqrt{1\frac{9}{16}}-\sqrt{\frac{9}{16}}$.

103. Составьте таблицу квадратов чисел от 10 до 20 и с ее помощью найдите:

а) $\sqrt{289}$; в) $\sqrt{169}$; д) $\sqrt{144}+\sqrt{256}$; ж) $\sqrt{225}\cdot\sqrt{256}$;

б) $\sqrt{225}$; г) $\sqrt{361}$; е) $\sqrt{400}-\sqrt{324}$; з) $\sqrt{625}:\sqrt{225}$.

17. ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

В пункте 1 § 1 мы убедились, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Это означает, что $\sqrt{2}$ не может быть рациональным числом. Он является иррациональным числом, т. е. записывается в виде непериодической бесконечной десятичной дроби, причем первые десятичные знаки этой дроби имеют вид 1,414... . Чтобы найти следующий десятичный знак, надо взять числа $1{,}414x$, где x может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, возвести по порядку эти числа в квадрат и найти такое значение x, при котором квадрат меньше чем 2, но следующий за ним квадрат больше чем 2. Таким значением является $x=2$. Далее повторяем то же самое с числами вида $1{,}4142x$. Продолжая этот процесс, получаем одну за другой цифры бесконечной десятичной дроби, равной $\sqrt{2}$.

Аналогично доказывается существование квадратного корня из любого положительного действительного числа. Разумеется, последовательное возведение в квадрат весьма трудоемкое занятие, и потому существуют способы быстрее находить десятичные знаки квадратного корня. С помощью калькулятора можно найти значение $\sqrt{a}$ с восемью верными цифрами. Для этого достаточно ввести в калькулятор число $a>0$ и нажать клавишу $\boxed{\sqrt{\ }}$ — на экране высветится

8 цифр значения $\sqrt{a}$. В некоторых случаях приходится использовать свойства квадратных корней, которые мы укажем ниже.

Если точность, даваемая калькулятором, недостаточна, можно воспользоваться способом уточнения значения корня, даваемым следующей теоремой:

Теорема. Если a — положительное число и x_1 — приближенное значение для $\sqrt{a}$ *по избытку*, то $\frac{a}{x_1}$ — приближенное значение для $\sqrt{a}$ *по недостатку*.

Доказательство.

По условию $x_1 > \sqrt{a}$ и потому $x_1^2 > a$, $\frac{a}{x_1^2} < 1$. Но $\left(\frac{a}{x_1}\right)^2 = \frac{a^2}{x_1^2} = a \cdot \frac{a}{x_1^2}$. Так как $\frac{a}{x_1^2} < 1$, то $a \cdot \frac{a}{x_1^2} < a$. Значит, $\left(\frac{a}{x_1}\right)^2 < a$, и $\frac{a}{x_1}$ — приближенное значение для $\sqrt{a}$ по недостатку.

Аналогично доказывается, что если x_1 — приближенное значение для $\sqrt{a}$ по недостатку, то $\frac{a}{x_1}$ — приближенное значение $\sqrt{a}$ по избытку.

Поскольку x_1 и $\frac{a}{x_1}$ являются приближенными значениями для $\sqrt{a}$ по избытку и по недостатку, то в качестве лучшего приближения для $\sqrt{a}$ естественно выбрать среднее арифметическое этих чисел, т. е. число $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$. А чтобы получить еще более точное значение для $\sqrt{a}$, надо взять среднее арифметическое чисел x_2 и $\frac{a}{x_2}$, т. е. число $x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right)$. Так вычисляются одно за другим все более точные приближенные значения для $\sqrt{a}$. Приближения ведут до тех пор, пока два полученных значения x_n и x_{n+1} не совпадут в пределах заданной точности. Можно доказать, что каждое приближение примерно удваивает число верных десятичных знаков.

Пример 1.

Уточним по формуле $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$ приближение $x_1 = 1{,}414$ для $\sqrt{2}$.

Решение. В нашем случае $a = 2$. Поэтому

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1{,}414 + \frac{2}{1{,}414}\right) \approx \frac{1}{2}(1{,}414 + 1{,}4144271) = 1{,}4142135\ldots .$$

Выполнив еще одно приближение, мы убедимся, что все выписанные знаки полученного ответа верны, т. е. число верных знаков удвоилось.

Пример 2.

Найдем приближенное значение для $\sqrt{5}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Выберем за первое приближение для $\sqrt{5}$ число 2. Тогда второе приближение вычисляется так:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = 2{,}25.$$

Далее имеем

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(2{,}25 + \frac{5}{2{,}25}\right) = 2{,}2361, \quad x_4 = \frac{1}{2}\left(2{,}2361 + \frac{5}{2{,}2361}\right) = 2{,}2361.$$

Значит, с точностью до 0,0001 имеем $\sqrt{5} = 2{,}2361$.

Правило нахождения приближенного значения квадратного корня из любого натурального числа a было известно еще математикам древнего Вавилона (более 4000 лет назад). Оно выглядит так: подбором находят число x_1, такое, чтобы $x_1^2 < a < (x_1+1)^2$, и представляют число a в виде $a = x_1^2 + b$. Далее полагают $\sqrt{a} \approx x_1 + \frac{b}{2x_1}$.

Например, $\sqrt{174} = \sqrt{169+5} = \sqrt{13^2+5} \approx 13 + \frac{5}{26} = 13\frac{5}{26}$. Это правило было известно и древним грекам. В трудах древнегреческого математика Герона Александрийского, жившего в I в. н. э., встречается запись: $\sqrt{160} = \sqrt{144+16} \approx 12 + \frac{16}{2 \cdot 12} = 12 + \frac{2}{3} = 12\frac{2}{3}$.

УПРАЖНЕНИЯ

104. Вычислите с помощью калькулятора:

а) $\sqrt{31\,847}$; в) $\sqrt{24\,856\,421}$;

б) $\sqrt{0{,}26452}$; г) $\sqrt{915{,}62136}$.

105. Вычислите с помощью калькулятора значение выражения:

а) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; г) $\sqrt{31{,}2^3 + 9{,}6 \cdot 19{,}5}$;

б) $\sqrt{7{,}1+\sqrt{3{,}6+\sqrt{0{,}21}}}$; д) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$;

в) $\sqrt{2}+\sqrt{3{,}82}$; е) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}$.

106. С помощью последовательных приближений найдите значения $\sqrt{32{,}61}$, $\sqrt{2{,}318}$, $\sqrt{645{,}32}$, $\sqrt{5626{,}1}$ с точностью до 0,00001.

18. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

К извлечению квадратных корней сводятся многие геометрические задачи. Например, в курсе геометрии доказывают **теорему Пифагора:**

Теорема. Квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов длин катетов этого треугольника.

Индийцы две тысячи лет тому назад доказывали ее с помощью следующего чертежа (рис. 30). Видим, что площади закрашенных фигур в обоих квадратах равны, но в одном случае площадь равна a^2+b^2, а в другом — c^2. Значит, $a^2+b^2=c^2$.

Из теоремы Пифагора следует, что расстояние между точками $M(x_1;\ y_1)$ и $N(x_2;\ y_2)$ координатной плоскости (рис. 31) выражается формулой

$$MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (1)$$

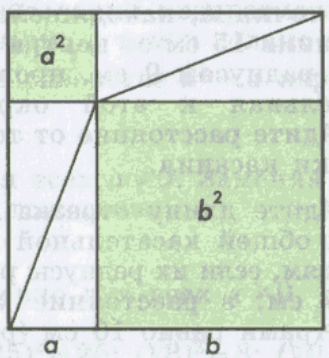
Пример 1.

Найдем расстояние от вершины дерева до конца его тени, если высота дерева равна 12 м, а длина тени — 16 м (рис. 32).

Решение. По теореме Пифагора имеем

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{12^2+16^2}=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}\ (\text{м}).$$

Так как $20^2=400$, то $\sqrt{400}=20$, т. е. расстояние равно 20 м.



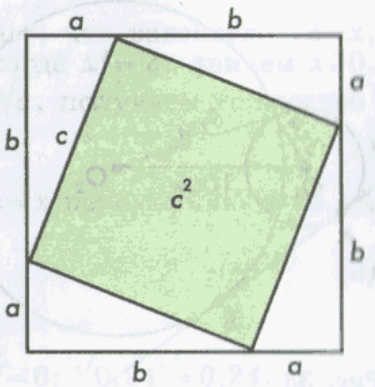


Рис. 30

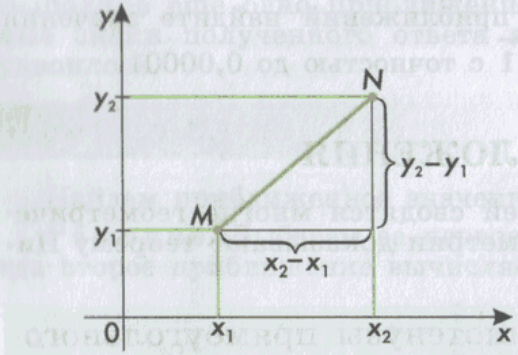


Рис. 31

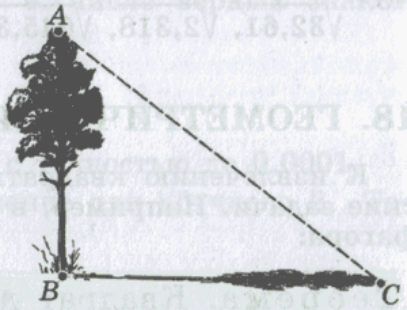


Рис. 32

Пример 2.

Найдем расстояние между точками $M(3; 1)$ и $N(8; -11)$ координатной плоскости.

Решение. По формуле (1) имеем

$$MN=\sqrt{(8-3)^2+(-11-1)^2}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}.$$

Так как $13^2=169$, то $\sqrt{169}=13$, и потому $MN=13$.

УПРАЖНЕНИЯ

107. Найдите длину диагонали прямоугольника, если его стороны имеют длину 9 см и 40 см. Найдите радиус окружности, описанной вокруг этого прямоугольника.

108. Сторона AB треугольника имеет длину 13 см, а проекция на сторону BC — 12 см. Вычислите высоту AH этого треугольника.

109. Найдите длину проволоки, соединяющей вершины двух столбов, если высота первого столба равна 6 м, второго столба — 13 м, а расстояние между ними равно 24 м.

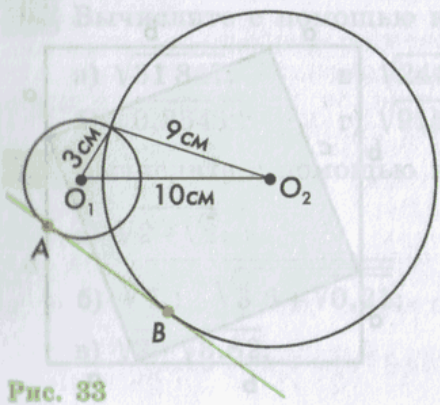


Рис. 33

110. Из точки A, находящейся на расстоянии 15 см от центра окружности радиусом 9 см, проведена касательная к этой окружности. Найдите расстояние от точки A до точки касания.

111. Найдите длину отрезка AB внешней общей касательной к окружностям, если их радиусы равны 3 см и 9 см, а расстояние между их центрами равно 10 см (рис. 33).

112. Определите расстояние между точками:

а) $A(5; 2)$ и $B(1; -1)$;
б) $C(-6; 3)$ и $D(0; 5)$;
в) $O(0; 0)$ и $P(-3; 4)$;
г) $M(9; -7)$ и $T(4; 5)$.

113. Даны вершины треугольника $A(3; 2)$, $B(-1; 1)$ и $C(11; -6)$. Определите длины его сторон.

114. Докажите, что треугольник с вершинами $A(0; 0)$, $B(3; 1)$ и $C(1; 7)$ прямоугольный.

115. Определите ординату точки M, зная, что ее абсцисса равна 7, а расстояние до точки $T(-1; 5)$ равно 10.

116. Вычислите периметр треугольника по координатам его вершин $A(-2; 1)$, $B(2; -2)$, $C(8; 6)$.

117. Проверьте, лежат ли на одной прямой три данные точки:

а) $A(0; 5)$, $B(2; 1)$ и $C(-1; 7)$;
б) $A(3; 1)$, $B(-2; -9)$ и $C(8; 11)$;
в) $A(0; 2)$, $B(-1; 5)$ и $C(3; 4)$.

118. Постройте отрезок длины $\sqrt{13}$ (учтите, что $13 = 3^2 + 2^2$). Измерьте отрезок и сравните результат с табличным значением $\sqrt{13}$.

119. С помощью построения и измерения найдите приближенное значение (двумя способами):

а) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{10}$; д) $\sqrt{34}$; ж) $\sqrt{125}$;
б) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{29}$; е) $\sqrt{65}$; з) $\sqrt{200}$.

120. Постройте последовательно отрезки, имеющие длину:

а) $\sqrt{2}$ см; б) $\sqrt{3}$ см; в) $\sqrt{4}$ см; г) $\sqrt{5}$ см.

19. ОСНОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Из определения квадратного корня вытекает, что равенство $\sqrt{a} = x$, где $a \geqslant 0$, верно в том и только в том случае, когда $x^2 = a$, причем $x \geqslant 0$. Заменяя в равенстве $x^2 = a$ переменную x на $\sqrt{a}$, получаем тождество

$$(\sqrt{a})^2 = a, \qquad (1)$$

верное для всех $a \geqslant 0$. Заменяя в равенстве $\sqrt{a} = x$ переменную a на x^2, получаем тождество

$$\sqrt{x^2} = x, \qquad (2)$$

которое верно для всех $x \geqslant 0$. Например,

$$(\sqrt{25})^2 = 25;\ (\sqrt{8})^2 = 8;\ (\sqrt{0{,}11})^2 = 0{,}11;\ \sqrt{6^2} = 6;\ \sqrt{0{,}24^2} = 0{,}24.$$

Формулы (1) и (2) показывают, что *для неотрицательных чисел операции возведения в квадрат и извлечения квадратного корня взаимно обратны*: если выполнить над каким-нибудь неотрицательным числом сначала одну из этих операций, а потом другую, то число не изменится.

Если a — отрицательное число, то равенство (1) неверно, так как $\sqrt{a}$ не имеет числового значения. При отрицательных значениях x неверно и равенство (2). Например, $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$, а не -5. Так как $x^2=(-x)^2$, а при $x<0$ имеем $-x>0$, то при $x<0$ верно равенство

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{(-x)^2}=-x. \qquad (3)$$

Итак,

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, \text{ если } x\geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x<0. \end{cases}$$

Но мы знаем, что

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x<0. \end{cases}$$

Поэтому для всех чисел x верно равенство

$$\sqrt{x^2}=|x|. \qquad (4)$$

Например, $\sqrt{8^2}=|8|=8$, $\sqrt{(-12)^2}=|-12|=12$.

Пример 1.

Упростим выражение $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.

Решение. Так как $(\sqrt{3})^2=3$, $(\sqrt{2})^2=2$, то $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=$
$=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=2\cdot(\sqrt{3})^2+2\cdot(\sqrt{2})^2=10$.

Пример 2.

Найдем значение выражения $\sqrt{(a-b)^2}$ при $a=2{,}1$, $b=3{,}6$.

Решение. При любом значении x выполняется равенство $\sqrt{x^2}=|x|$. Поэтому $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$. Но $|2{,}1-3{,}6|=|-1{,}5|=1{,}5$. Значит, при $a=2{,}1$, $b=3{,}6$ имеем $\sqrt{(a-b)^2}=1{,}5$.

УПРАЖНЕНИЯ

121. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}=10$; в) $\sqrt{y}=1$; д) $8\sqrt{t}=8$; ж) $3\sqrt{x}=1$;

б) $\sqrt{x}=9$; г) $\sqrt{z}=\frac{2}{7}$; е) $5\sqrt{z}=0$; з) $12\sqrt{y}=5$.

122. Объясните, почему уравнение не имеет корней:

а) $\sqrt{x}=-5$; в) $-\sqrt{x}=2$; д) $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=-3$;

б) $\sqrt{x}+1=0$; г) $5\sqrt{x}=-1{,}5$; е) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}=18$.

123. Имеет ли числовое значение выражение:

а) $\sqrt{11}$; в) $-\sqrt{186}$; д) $\sqrt{51}-\sqrt{-6}$;

б) $\sqrt{83{,}1}$; г) $\sqrt{-186}$; е) $\sqrt{51}-\sqrt{6}$?

124. При каких значениях x имеет числовое значение выражение:

а) $\sqrt{x}$; б) $\sqrt{-x}$; в) $\sqrt{-25x}$; г) $\sqrt{17x}$; д) $\sqrt{x^2}$; е) $\sqrt{-9x^2}$?

125. Найдите область допустимых значений переменной выражения:

а) $\sqrt{x-3}$; б) $\sqrt{a+2}$; в) $\sqrt{b-\frac{1}{2}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{x-4}}$.

126. Представьте число в виде квадрата:

а) 9; в) 6; д) 2,5; ж) 0,25; и) a, где $a\geqslant 0$;

б) 169; г) 10; е) $-2{,}5$; з) $\frac{4}{49}$; к) $4b$, где $b\geqslant 0$.

127. Разложите на множители двучлен:

а) x^2-7; г) $-11x^2+31$; ж) $\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{11}$;

б) $-4x^2+19$; д) $0{,}3x^2-0{,}29$; з) $-\frac{1}{91}x^2+\frac{1}{87}$.

в) $5x^2-36$; е) $x^2-\frac{5}{7}$;

128. Решите уравнение:

а) $x^2-5=0$; в) $\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{11}=0$; д) $0{,}7x^2-\frac{3}{16}=0$;

б) $-9x^2+17=0$; г) $0{,}02x^2-0{,}15=0$; е) $\frac{3}{13}x^2-0{,}2=0$.

129. Найдите квадраты чисел:

$\sqrt{25}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{4}$; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $-\sqrt{1{,}3}$.

130. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{7})^2$; д) $10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$; и) $\left(\frac{1}{10}\sqrt{13}\right)^2$;

б) $(-\sqrt{7})\cdot\sqrt{7}$; е) $(3\sqrt{5})^2$; к) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

в) $(-\sqrt{26})^2$; ж) $(0{,}5\cdot\sqrt{8})^2$; л) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2$;

г) $(-\sqrt{26})\cdot\sqrt{26}$; з) $(-2\sqrt{15})^2$; м) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$.

131. Сократите дробь:

а) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{10}{3\sqrt{10}}$; д) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; ж) $\frac{c-\sqrt{c}}{5\sqrt{c}}$;

б) $-\frac{5}{\sqrt{5}}$; г) $-\frac{a}{3\sqrt{a}}$; е) $\frac{\sqrt{12}+12}{7\sqrt{12}}$; з) $\frac{x^2-4x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

132. Докажите, что выражение имеет рациональное числовое значение:

а) $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$; г) $(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{6}-\sqrt{7})$;

б) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$; д) $(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)$;

в) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$; е) $(\sqrt{5}+2\sqrt{10})(\sqrt{5}-2\sqrt{10})$.

133. Сократите дробь:

а) $\frac{a^2-4}{a-2}$; б) $\frac{c^2-6}{c-\sqrt{6}}$; в) $\frac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$; г) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

134. Вычислите:

а) $\sqrt{(0{,}18)^2}$; г) $\sqrt{1{,}7^2}$; ж) $\sqrt{(-23)^2}$;

б) $\sqrt{(-0{,}4)^2}$; д) $\sqrt{|-1{,}9|^2}$; з) $\sqrt{52^2}$;

в) $\sqrt{(-0{,}8)^2}$; е) $\sqrt{2{,}4^2}$; и) $\sqrt{|-65|^2}$.

135. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{x^2}$ при $x=22;\ -35;\ -1\frac{2}{3};\ 0$;

б) $2\sqrt{(-a)^2}$ при $a=7;\ 12;\ -8;\ 0$;

в) $0{,}1\sqrt{|y|^2}$ при $y=-15;\ 77;\ 0$.

136. Замените выражение тождественно равным ему выражением, не содержащим знака радикала:

а) $\sqrt{p^2}$; б) $\sqrt{y^2}$; в) $\sqrt{9b^2}$; г) $\sqrt{36x^2}$; д) $\sqrt{0{,}01a^2}$; е) $\sqrt{0{,}04b^2}$.

137. Запишите выражение без знака радикала, если переменные принимают неотрицательные значения:

а) $\sqrt{c^2}$; б) $\sqrt{a^2}$; в) $\sqrt{4a^2}$; г) $\sqrt{0{,}25b^2}$.

138. Запишите выражение без знака радикала, если переменные принимают неположительные значения:

а) $\sqrt{x^2}$; б) $\sqrt{\frac{x^2}{100}}$; в) $\sqrt{\frac{4a^2}{9}}$; г) $\sqrt{0{,}0004c^2}$.

139. Замените выражение тождественно равным ему выражением, не содержащим знака радикала:

а) $\sqrt{(a-1)^2}$; в) $\sqrt{x^2+2x+1}$;

б) $\sqrt{(c+2)^2}$; г) $\sqrt{4y^2-4y+1}$;

д) $\sqrt{(x-4)^2}$, если $x \geqslant 4$; з) $\sqrt{(7+y)^2}$, если $y < -7$;
е) $\sqrt{(a-2)^2}$, если $a < 2$; и) $\sqrt{(10+c)^2}$, если $c \geqslant -10$;
ж) $\sqrt{(3-m)^2}$, если $m \geqslant 3$; к) $\sqrt{(k+1)^2}$, если $k \leqslant -1$.

140. При каких значениях переменных верно равенство:

а) $\sqrt{x^2-2x+1}=x-1$; в) $\sqrt{c^2-6c+9}=3-c$;
б) $\sqrt{4a^2+4a+1}=1+2a$; г) $\sqrt{x^4+2x^2+1}=x^2+1$?

141. Запишите лишь с одним знаком радикала выражение:

а) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$; б) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$; в) $\sqrt{(\sqrt{11}-\sqrt{10})^2}$; г) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}$.

20. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ДРОБИ И СТЕПЕНИ

Выражения $\sqrt{9}\cdot\sqrt{4}$ и $\sqrt{9\cdot 4}$ имеют одно и то же значение 6. В самом деле, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{36}=6$, поэтому $\sqrt{9}\cdot\sqrt{4}=3\cdot 2=6$ и $\sqrt{9\cdot 4}=\sqrt{36}=6$.

Равенство $\sqrt{9}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{9\cdot 4}$ — частный случай общего утверждения:

Теорема 1. Квадратный корень из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению квадратных корней из этих чисел, т. е. при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ имеем

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}. \qquad (1)$$

Доказательство.

Пусть числа a и b неотрицательны. Тогда по правилу возведения произведения в степень имеем

$$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=a\cdot b.$$

Кроме того, $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ — неотрицательное число как произведение двух неотрицательных чисел $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$. Поэтому $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

Пример 1.

Найдем значение выражения $\sqrt{625\cdot 256\cdot 0{,}0001}$.

Решение. Мы имеем $\sqrt{625}=25$, $\sqrt{256}=16$, $\sqrt{0{,}0001}=0{,}01$, и потому

$$\sqrt{625\cdot 256\cdot 0{,}0001}=\sqrt{625}\cdot\sqrt{256}\cdot\sqrt{0{,}0001}=25\cdot 16\cdot 0{,}01=4.$$

Пример 2.

Запишем $\frac{7}{\sqrt{6}}$ в виде произведения рационального числа на корень (как говорят, **избавимся от иррациональности в знаменателе**).

Решение. Имеем $\frac{7}{\sqrt{6}}=\frac{7\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{7\sqrt{6}}{\sqrt{6^2}}=\frac{7\sqrt{6}}{6}=\frac{7}{6}\sqrt{6}$.

Замечание.

Если числа a и b отрицательны, то их произведение ab положительно, и поэтому существует квадратный корень $\sqrt{ab}$. Но квадратные корни $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ в этом случае не имеют значений, и потому равенство (1) ложно. *Нельзя*, например, *писать*

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=\sqrt{(-4)(-9)}=\sqrt{36}=6.$$

Теорема 2. Квадратный корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен квадратному корню из числителя, деленному на корень квадратный из знаменателя, т. е. при $a\geqslant 0$, $b>0$ имеем

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}. \qquad (2)$$

Доказательство.

По правилу возведения дроби в степень имеем

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}.$$

Так как, кроме того, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — неотрицательное число, то $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Пример 3.

Имеем $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$; $\sqrt{0{,}04}=\sqrt{\frac{4}{100}}=\frac{2}{10}=0{,}2$.

Наконец, докажем следующее утверждение:

Теорема 3. Если a — положительное число, а n — натуральное число, то имеет место равенство

$$\sqrt{a^{2n}}=a^n. \qquad (3)$$

Доказательство.

Утверждение непосредственно вытекает из того, что $(a^n)^2 = a^{2n}$ $a^n > 0$.

Пример 4.

Имеем: $\sqrt{71^4} = 71^2 = 5041$; $\sqrt{0{,}03^6} = 0{,}03^3 = 0{,}000027$.

УПРАЖНЕНИЯ

142. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{100 \cdot 49}$; д) $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 81}$; и) $\sqrt{1{,}44 \cdot 0{,}0256}$;

б) $\sqrt{121 \cdot 64}$; е) $\sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{49}}$; к) $\sqrt{2{,}25\sqrt{0{,}0016}}$.

в) $\sqrt{676 \cdot 64}$; ж) $\sqrt{0{,}36 \cdot 169}$;

г) $\sqrt{81 \cdot 400}$; з) $\sqrt{121 \cdot 0{,}49}$;

143. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{810 \cdot 40}$; в) $\sqrt{75 \cdot 48}$; д) $\sqrt{2{,}5 \cdot 14{,}4}$;

б) $\sqrt{72 \cdot 32}$; г) $\sqrt{4{,}9 \cdot 360}$; е) $\sqrt{90 \cdot 6{,}4}$.

144. Вычислите:

а) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; б) $\sqrt{313^2 - 312^2}$; в) $\sqrt{17^2 - 8^2}$; г) $\sqrt{117^2 - 108^2}$.

145. Сравните значение выражений:

а) $\sqrt{5^2 + 12^2}$ и $5 + 12$; б) $\sqrt{10^2 - 6^2}$ и $10 - 6$.

146. Найдите длину катета прямоугольного треугольника, если длин его гипотенузы равна 41 см, а длина другого катета — 40 см.

147. Найдите площадь прямоугольника, если длина одной из его ст рон равна 56 см, а длина диагонали — 65 см.

148. Представьте выражение в виде произведения корней:

а) $\sqrt{15}$; б) $\sqrt{21}$; в) $\sqrt{7a}$; г) $\sqrt{-3c}$.

149. Разложите на множители, вынеся за скобку корень:

а) $\sqrt{10} + \sqrt{2}$; б) $\sqrt{6} - \sqrt{10}$; в) $\sqrt{18} + \sqrt{22}$; г) $2 - \sqrt{14}$.

150. Сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{18}}{\sqrt{6}}$; в) $\frac{\sqrt{21} + \sqrt{14}}{\sqrt{7}}$; г) $\frac{\sqrt{15} - 5}{\sqrt{6} - \sqrt{10}}$.

151. Вычислите:

а) $\sqrt{2^6 \cdot 3^4}$; б) $\sqrt{5^4 \cdot 2^4}$; в) $\sqrt{2^8 \cdot 5^4}$.

152. Вычислите значение выражения, предварительно разложив подкоренное выражение на множители:

а) $\sqrt{576}$; б) $\sqrt{1225}$; в) $\sqrt{1936}$; г) $\sqrt{19600}$.

153. Запишите выражение без знака радикала:

а) $\sqrt{9a^2}$, где $a \geqslant 0$;

б) $\sqrt{25c^4}$, где $c > 0$;

в) $\sqrt{0{,}36b^2}$, где $b < 0$;

г) $\sqrt{81y^{10}}$, где $y < 0$;

д) $\sqrt{a^2c^2}$, где $a > 0$ и $c > 0$;

е) $\sqrt{0{,}36b^2c^4}$, где $b < 0$;

ж) $\sqrt{\frac{1}{9}a^6b^4}$, где $a < 0$;

з) $\sqrt{a^{14}x^{10}}$, где $a > 0$ и $x < 0$.

154. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$; б) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$; в) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$; г) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$; д) $\sqrt{21} \cdot \sqrt{21}$; е) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}$; ж) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{7}$; з) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$; и) $\sqrt{1{,}2} \cdot \sqrt{3\frac{1}{3}}$; к) $\sqrt{14{,}4} \cdot \sqrt{10}$.

155. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{144}{169}}$; в) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; г) $\sqrt{\frac{225}{256}}$; д) $\sqrt{\frac{64}{49}}$; е) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; ж) $\sqrt{\frac{121}{25}}$; з) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$.

156. Представьте выражение в виде частного корней:

а) $\sqrt{\frac{2}{7}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{10}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{c}}$; г) $\sqrt{-\frac{a}{5}}$.

157. Представьте в виде $a\sqrt{b}$, где a — рациональное число, а b — натуральное число, выражение:

а) $\frac{2}{\sqrt{10}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{9}{2\sqrt{3}}$; д) $-\frac{3}{4\sqrt{5}}$; е) $-\frac{21}{2\sqrt{14}}$; ж) $\sqrt{\frac{9}{11}}$; з) $\sqrt{\frac{5}{6}}$; и) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; к) $\sqrt{\frac{2}{15}}$; л) $9\sqrt{\frac{2}{3}}$; м) $20\sqrt{\frac{1}{5}}$; н) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{7}}$; о) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{11}}$; п) $2\sqrt{0{,}7}$; р) $12\sqrt{1{,}3}$; с) $4\sqrt{12{,}1}$; т) $\frac{1}{6}\sqrt{0{,}9}$.

158. Упростите выражение:

а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; в) $\frac{\sqrt{333}}{\sqrt{111}}$; д) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{45}}$; ж) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{35}}$; и) $\frac{\sqrt{51}}{\sqrt{34}}$;

б) $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2300}}$; г) $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{28}}$; е) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{65}}$; з) $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{256}}$; к) $\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{65}}$.

159. Вычислите:

а) $\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}-\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}$;

б) $\sqrt{20+2\sqrt{19}}\cdot\sqrt{20-2\sqrt{19}}$;

в) $\sqrt{16+\sqrt{31}}\cdot\sqrt{16-\sqrt{31}}$;

г) $\sqrt{15+2\sqrt{26}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{1+2\sqrt{26}}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{1+2\sqrt{26}}}$.

160. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; в) $\frac{5}{4+\sqrt{11}}+\frac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{11}}-\frac{10}{\sqrt{19}+3}$.

б) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$;

161. Сделайте подстановку $u=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$, $v=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)$ в выражении:

а) $uv-\sqrt{u^2-1}\cdot\sqrt{v^2-1}$; б) $uv+\sqrt{u^2-1}\cdot\sqrt{v^2-1}$.

162. Упростите выражение:

а) $\sqrt{x^2y^4}$; б) $\sqrt{256a^4b^8}$; в) $\sqrt{\frac{16x^4}{25y^8}}$; г) $\sqrt{\frac{121u^{10}}{225v^{16}}}$.

163. Упростите выражение:

а) $\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1-2x^2+x^4}}$ при $|x|<1$ и $|x|>1$;

б) $\sqrt{x^2-10x+25}+\sqrt{x^2+6x+9}$ при $x\leqslant -3$, $-3\leqslant x\leqslant 5$ и $x\geqslant 5$.

164. Не используя знака модуля, запишите выражение:

а) $\frac{1}{2}(x-|x|)$; б) $\frac{1}{2}|x-|x||$; в) $|x+3|+|x+2|$; г) $|x^2-5x+6|$.

165. Определите, при каких значениях x верно равенство:

а) $\sqrt{x(x-1)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$; 1) $x>0$; 2) $x>1$; 3) $x\geqslant 1$; 4) $0\leqslant x\leqslant 1$;

б) $\sqrt{x(x-1)}=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{1-x}$; 1) $x\leqslant 0$; 2) $x<0$; 3) $x\geqslant 0$; 4) $x\leqslant 1$.

166. Уничтожьте иррациональность в знаменателе:

а) $\dfrac{2-\sqrt{30}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}}$; б) $\dfrac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

167. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{4-4a+a^2}}{a-2}-\dfrac{a-2}{a^2-4}$; в) $\left(\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{a-\sqrt{a}}-\dfrac{a}{\sqrt{a}+1}\right)\cdot\dfrac{1-a}{1+a}$;

б) $\dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$; г) $\dfrac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}+\dfrac{x^2-x\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}-\dfrac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}+\dfrac{4x\sqrt{y}}{x^2-y}$.

21*. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

При преобразовании выражений, содержащих квадратные корни, оказывается полезной следующая формула:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}, \qquad (1)$$

где $A^2\geqslant B$ (в обеих частях равенства одновременно берутся знаки «плюс» или «минус»). Чтобы доказать это равенство, заметим, во-первых, что и левая, и правая его части являются при $A\geqslant 0$, $B\geqslant 0$, $A^2-B\geqslant 0$ неотрицательными числами. Возведем теперь обе части равенства (1) в квадрат. В левой части имеем $A\pm\sqrt{B}$, в правой части по формуле квадрата суммы или разности получаем

$$\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}\pm 2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}+\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}=$$

$$=A\pm 2\sqrt{\frac{(A+\sqrt{A^2-B})(A-\sqrt{A^2-B})}{4}}=A\pm 2\sqrt{\frac{A^2-(\sqrt{A^2-B})^2}{4}}=$$

$$=A\pm 2\sqrt{\frac{A^2-(A^2-B)}{4}}=A\pm 2\sqrt{\frac{B}{4}}=A\pm\sqrt{B}.$$

Таким образом, квадраты обеих частей равенства (1) оказались одинаковыми, а поскольку эти части — неотрицательные числа, то равенство (1) доказано.

Пример.

Упростим выражение $\sqrt{5-\sqrt{21}}$.

1-й способ. В данном случае имеем $A=5$, $B=21$, $A^2-B=5^2-21=4$, и потому по формуле (1)

$$\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{4}}{2}}-\sqrt{\frac{5-\sqrt{4}}{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2-й способ. Приведем подкоренное выражение к полному квадрату:

$$5-\sqrt{21}=\frac{1}{2}(10-2\sqrt{21})=\frac{1}{2}(10-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3})=$$

$$=\frac{1}{2}(7+3-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3})=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2=\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Поэтому $\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

УПРАЖНЕНИЯ

168. Упростите выражение:

а) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{12+\sqrt{63}}$; г) $\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}$.

169. Докажите, что:

а) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\begin{cases}2 & \text{при } 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2\sqrt{x-1} & \text{при } x>2.\end{cases}$

170. Упростите при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$ выражение

$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}.$$

171. Вычислите:

а) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{|12\sqrt{3}-21|}-\sqrt{12\sqrt{3}+21}$;

в) $\sqrt{|-18-8\sqrt{2}|}-\sqrt{|8\sqrt{2}-18|}-\frac{1}{2}\sqrt{32}$;

г) $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}+1}-\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-1}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

172. Докажите, что следующие числа иррациональны:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

173. Известно, что a, b, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — рациональные числа. Докажите, что $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ тоже рациональны.

174. Докажите, что число, полученное последовательным приписыванием после 0 с запятой всех натуральных чисел начиная с 1, т. е. число $0{,}123456789101112\ldots$, иррационально.

175. Установите, какие из нижеследующих чисел рациональны, а какие иррациональны:

а) $\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}$; в) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

б) $\sqrt{9+\sqrt{80}}+\sqrt{9-\sqrt{80}}$;

176. Докажите, что если $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$ и $b+c=a+d$, то $bc\geqslant ad$.

177. Докажите, что для положительных значений a, b и x выполняются неравенства:

а) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$; б) $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$; в) $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$.

178. Докажите, что для любых действительных чисел a и b верно неравенство:

а) $a^2+b^2+1\geqslant ab+a+b$; в) $(a^2+b^2)(a^4+b^4)\geqslant(a^3+b^3)^2$.

б) $5a^2-6ab+5b^2\geqslant 0$;

179. Докажите, что если a, b, c — положительные числа, то

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c.$$

Указание. Воспользуйтесь неравенством $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

180. Докажите, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, то

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8abc.$$

181. Какое из двух чисел больше: $\frac{10^{1992}+1}{10^{1993}+1}$ или $\frac{10^{1993}+1}{10^{1994}+1}$?

182. Докажите, что если $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$, то

$$(a+b)(a^4+b^4)\geqslant(a^2+b^2)(a^3+b^3).$$

183. Пусть $m=a+b+c$ и $t=ab+bc+ca$, где a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что $3t\leqslant m^2\leqslant 4t$.

Указание. Рассмотрите разности m^2-3t и m^2-4t.

184. Докажите, что $(a+b)^4\leqslant 8(a^4+b^4)$.

185. Докажите, что при любом действительном значении a выполняется неравенство:

$$3(1+a^2+a^4)\geqslant(1+a+a^2)^2.$$

Указание. Разложите $1+a^2+a^4$ на множители.

186. Дано: $1<a<b+c<a+1$, $b<c$. Докажите, что $b<a$.

187. Докажите, что если $\frac{a_1}{b_1} \geqslant \frac{a_2}{b_2} \geqslant \frac{a_3}{b_3}$ и b_1, b_2, b_3 одного и того же знака, то $\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}$ заключено между наибольшим и наименьшим из записанных отношений.

188. Докажите, что утверждение задачи 187 справедливо для выражения $\frac{m_1a_1+m_2a_2+m_3a_3}{m_1b_1+m_2b_2+m_3b_3}$, где $m_i \in N$ $(i=1, 2, 3)$.

189. Докажите справедливость неравенства

$$\sqrt{b+a}-\sqrt{b}<\frac{a}{2\sqrt{b}} \quad (b>0,\ a\geqslant -b,\ a\neq 0).$$

190. Докажите, что при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$ верно неравенство

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

191. Докажите, что если $x+y+z=8$ и $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, то $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}<5$

192. Докажите, что

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

193. Преобразуйте подкоренное выражение к полному квадрату и извлеките корень:

а) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; б) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$; в) $\sqrt{n-2\sqrt{n-1}}$, $n\geqslant 2$.

194. Упростите:

а) $\frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\frac{9}{2}}$;

в) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

195. Вычислите: $\frac{1}{16}\sqrt{192}-2{,}5\sqrt{\frac{4}{75}}-\frac{1}{234}\sqrt{98^2-71^2}$.

196. Разность $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найдите это целое число.

197. Упростите выражение

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}.$$

1) $a(a-1)$; 2) $a(a+1)$; 3) $\sqrt{a+1}$; 4) $\sqrt{a-1}$.

198. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$;

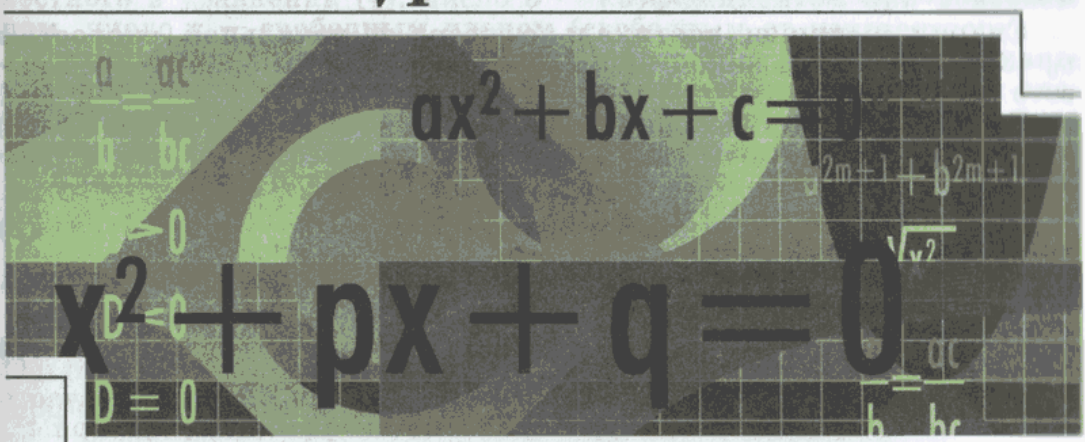
в) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

г) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$;

д) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$.

199. Сравните два числа: $a=\dfrac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$ и $b=\dfrac{6}{3-\sqrt{3}}$.

Глава VI



КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ КОРНИ

Рассмотрим движение тела, подброшенного вверх с начальной скоростью v_0. Если в начальный момент (т. е. при $t_0=0$) тело находилось на высоте h_0 над поверхностью Земли, то, как выводят в курсе физики, в момент t оно будет находиться на высоте h, где

$$h=h_0+v_0t-4{,}9t^2. \qquad (1)$$

По этой формуле*) можно определять высоту тела h, зная момент времени t. Артиллеристам-зенитчикам приходится решать обратную задачу: определять, через сколько времени выпущенный ими снаряд окажется на данной высоте.

*) Формула (1) верна для значений t, меньших, чем промежуток времени от броска до падения тела на Землю.

Задача.

Снаряд выпущен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 392$ м/с. Через какой промежуток времени он окажется на высоте $h = 5880$ м?

Решение. Для решения этой задачи положим в формуле (1) $h = 5880$, $v_0 = 392$, $h_0 = 0$ (так как снаряд летит с поверхности Земли). Получаем

$$5880 = 392t - 4{,}9t^2. \qquad (2)$$

Задача свелась к решению уравнения (2). Оно имеет те же корни, что и уравнение

$$t^2 - 80t + 1200 = 0, \qquad (3)$$

получаемое, если перенести все члены уравнения (2) в левую часть и разделить обе части этого уравнения на коэффициент 4,9 при t^2.

Чтобы решить уравнение (3), выделим в левой части полный квадрат и разложим получившееся выражение на множители:

$$t^2 - 80t + 1200 = t^2 - 2 \cdot 40t + 40^2 - 40^2 + 1200 = (t-40)^2 - 1600 + 1200 =$$
$$= (t-40)^2 - 400 = (t-40)^2 - 20^2 = (t-20)(t-60).$$

Итак, надо решить уравнение $(t-20)(t-60) = 0$. Оно имеет два корня: $t_1 = 20$ и $t_2 = 60$. Это значит, что снаряд побывает на высоте 5880 м дважды: через 20 с (после выстрела) и через 60 с, первый раз поднимаясь вверх, а второй раз падая вниз.

Уравнение (2), к решению которого свелась задача, называется **квадратным уравнением**, потому что неизвестное t входит в него в квадрате и не входит в более высоких степенях. Квадратными уравнениями являются такие: $x^2 - 16 = 0$, $5x^2 + 10x = 0$, $7x^2 - 6x + 1 = 0$ и т. д.

Умение решать задачи с помощью квадратных уравнений можно обнаружить уже у математиков древнего Вавилона, в «Арифметике» Диофанта, в трудах индийских математиков.

Однако впервые запись квадратных уравнений в буквенных обозначениях появилась только в XVI в. благодаря трудам французского математика Ф. Виета (1540—1603), и в общем виде можно дать такое определение:

Определение 1. ***Квадратным уравнением*** **называют уравнение**

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (4)$$

где x — неизвестное, a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$ (иначе уравнение было бы линейным).

Другими словами, квадратным называют уравнение, у которого левая часть — квадратный трехчлен, а правая часть — нуль.

Условимся число a называть **коэффициентом при квадрате неизвестного** в уравнении (4), число b — **коэффициентом при неизвестном**, число c — **свободным членом** (свободным от неизвестного).

Число, при подстановке которого вместо неизвестного в уравнение получается верное числовое равенство, называется, как мы знаем, **корнем** этого уравнения. В решенной выше задаче квадратное уравнение $t^2-80t+1200=0$ имело два корня: $t_1=20$ и $t_2=60$.

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет те же корни, что и уравнение $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, в котором коэффициент при x^2 равен 1, так как для любого числа $a\neq 0$, $ax^2+bx+c\equiv a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

Определение 2. Квадратное уравнение, в котором коэффициент при x^2 равен 1, называется *приведенным*.

Например, $x^2-6x+5=0$, $x^2-0{,}07=0$, $x^2+\frac{3}{4}x-1=0$ — приведенные квадратные уравнения.

Обычно приведенное квадратное уравнение обозначают так:

$$x^2+px+q=0.$$

Чтобы решить уравнение (3), мы разложили левую часть его на множители: $t^2-80t+1200=(t-20)(t-60)$.

После этого, решив уравнение $(t-20)(t-60)=0$, нашли корни $t_1=20$ и $t_2=60$. Вообще верна следующая теорема:

Теорема. Если выполняется тождество

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \qquad (5)$$

то квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ при $x_1\neq x_2$ имеет *два корня* x_1 и x_2, а при $x_1=x_2$ — лишь один корень x_1.

Доказательство.

Правая часть тождества (5) обращается в нуль при $x=x_1$ и $x=x_2$ и не обращается в нуль при других значениях x (так как при других значениях x оба множителя $x-x_1$ и $x-x_2$ отличны от нуля). Это и значит, что числа x_1 и x_2 и только они являются корнями уравнения $a(x-x_1)(x-x_2)=0$, т. е. уравнения $ax^2+bx+c=0$. Если $x_1=x_2$, т. е. если $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$, то принято говорить, что x_1 является для уравнения $ax^2+bx+c=0$ **корнем второй кратности** (или *корнем кратности* 2).

С помощью доказанной теоремы легко составлять квадратные уравнения, имеющие заданные корни и заданный коэффициент при x^2.

Пример 1.

Составим квадратное уравнение, корнями которого являются числа 9 и -16, а коэффициент при x^2 равен 5.

Решение. Одним из уравнений с корнями 9 и -16 является $(x-9)(x+16)=0$. Раскрывая скобки, получаем уравнение $x^2+7x-144=0$. Чтобы сделать коэффициент при x^2 равным 5, умножим обе части этого уравнения на 5 (корни уравнения от этого не изменятся). Получаем $5x^2+35x-720=0$.

Пример 2.

Составим квадратное уравнение, имеющее корень 4 второй кратности, причем коэффициент при x^2 равен -6.

Решение. Искомое квадратное уравнение имеет вид

$$-6(x-4)^2=0.$$

Раскрывая скобки, получаем уравнение

$$-6x^2+48x-96=0.$$

Не всякое квадратное уравнение имеет корни. Не имеет их, например, уравнение $x^2+4=0$ — выражение x^2 принимает положительные значения при всех x, отличных от нуля, и значение 0 при $x=0$, а потому сумма x^2+4 положительна при всех значениях x. Значит, ни при одном значении x не выполняется равенство $x^2+4=0$. Точно так же не имеет корней уравнение $x^2+8x+25=0$. В самом деле, выделяя полный квадрат, записываем его в виде $(x+4)^2+9=0$ и замечаем, что выражение $(x+4)^2+9$ принимает лишь положительные значения.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Назовите коэффициенты a, b, c в уравнении:

а) $4x^2+5x+7=0$;
б) $8x^2-3x+4=0$;
в) $-3x^2+x-5=0$;
г) $x^2-4=0$;
д) $3x^2-x=0$;
е) $13x^2=0$;
ж) $4x^2-5+x=0$;
з) $5-6x+x^2=0$;
и) $4-2x^2-x=0$.

2. Приведите уравнение к виду $ax^2+bx+c=0$:

а) $4x^2-2x+5=7+2x$;
б) $7x^2-6x-3=x^2+5x+1$;
в) $(x-3)(2x+4)=-10$;
г) $(8x-1)(4x+2)=(7x+4)(3x-8)$;
д) $\dfrac{2x-4}{3x-5}=\dfrac{9x+1}{5x+4}$;
е) $\dfrac{2x+3}{3x-2}+\dfrac{5x-9}{4x-5}=1$;
ж) $\dfrac{1}{kx-3}+\dfrac{1}{kx+4}=1$;
з) $10+mx=\dfrac{13}{mx-10}$.

3. Найдите корни квадратного уравнения или докажите, что оно не имеет корней:

а) $(x+2)(x+4)=0$;
б) $3(x+5)(x-7)=0$;
в) $-5(x-8)(x-2)=0$;
г) $(7+4x)(3-5x)=0$;
д) $x^2+6x=0$;
е) $2x^2-8=0$;
ж) $4(x+3)^2+9=0$;
з) $\frac{3x^2-2}{2}-\frac{4x^2-3}{3}=x$;
и) $(x+4)^2-64=0$.

4. Решите уравнение, используя выделение полного квадрата и разложение на множители:

а) $x^2-12x+35=0$;
б) $x^2+4x-5=0$;
в) $x^2-9x+14=0$;
г) $x^2+5x-14=0$;
д) $x^2-x-6=0$;
е) $(2x+3)^2+(x-2)^2=13$;
ж) $(2x+7)(7-2x)=49+x(x+2)$;
з) $\frac{x+3}{x-5}=\frac{3x}{x-4}$.

5. Сократите дробь:

а) $\frac{a^2+6a-91}{a^2+8a-105}$; б) $\frac{x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$; в) $\frac{2a^2+8a-90}{3a^2-36a+105}$; г) $\frac{6a^2-7a-3}{2a^2-a-3}$.

6. Составьте квадратное уравнение, имеющее:

а) коэффициент при x^2, равный 3, а корни 5 и 6;
б) коэффициент при x^2, равный 1, а корни -3 и 2;
в) коэффициент при x^2, равный -4, а корни, равны 7;
г) коэффициент при x^2, равный -3, а корни, равны -5;
д) коэффициент при x^2, равный 2, а корни 0 и $\frac{a-b}{2}$;
е) коэффициент при x^2, равный 1, а корни $\frac{1}{n}$ и $-\frac{1}{n}$.

2. ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Выделять каждый раз полный квадрат и разлагать на множители левую часть квадратного уравнения слишком громоздко. Мы сделаем это один раз для уравнения с буквенными коэффициентами и получим формулу для решения любого квадратного уравнения.

Сначала разделим обе части уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

на a — от этого его корни не изменятся. Для решения получившегося уравнения

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad (2)$$

выделим в левой части полный квадрат

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=$$
$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Для краткости обозначим выражение b^2-4ac через D. Тогда полученное тождество примет вид

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}. \qquad (3)$$

Возможны три случая:

а) Если число D положительно ($D>0$), то в этом случае можно извлечь из D квадратный корень и записать D в виде $D=(\sqrt{D})^2$. Тогда $\frac{D}{4a^2}=\frac{(\sqrt{D})^2}{(2a)^2}=\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$, и потому тождество (3) принимает вид

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2.$$

По формуле разности квадратов выводим отсюда:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=$$
$$=\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right). \qquad (4)$$

В силу теоремы пункта 1 из тождества (4) следует, что уравнение (2) (а тем самым и уравнение (1)) имеет два корня:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Обычно эти корни записывают одной формулой

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \qquad (5)$$

или, вспоминая, что $D=b^2-4ac$, в виде

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (5')$$

Пример 1.

Решим уравнение $4x^2-7x+3=0$.

Решение. В данном случае $a=4$, $b=-7$, $c=3$, и потому $D=(-7)^2-4\cdot4\cdot3=49-48=1$. Значит, $x_{1,2}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\cdot4}=\frac{7\pm1}{8}$. Имеем $x_1=\frac{7+1}{8}=1$, $x_2=\frac{7-1}{8}=\frac{3}{4}$.

б) Если число D равно нулю ($D=0$), то тождество (3) принимает вид

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Отсюда следует, что при $D=0$ уравнение (1) имеет один корень $x=-\frac{b}{2a}$ кратности 2. Его можно получить и по формуле (5), положив в ней $D=0$.

Пример 2.

Решим уравнение $4x^2+12x+9=0$.

Решение. Имеем $a=4$, $b=12$, $c=9$, и поэтому $D=b^2-4ac=12^2-4\times\times4\cdot9=0$. Значит, $x_1=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{2\cdot4}=-\frac{3}{2}$.

в) Если число D отрицательно ($D<0$), то $-D>0$, и потому выражение (3) является суммой двух слагаемых, одно из которых неотрицательно, а другое положительно. Такая сумма не может равняться нулю, поэтому уравнение (2) не имеет действительных корней. Не имеет их и уравнение (1).

Пример 3.

Решим уравнение $x^2+4x+7=0$.

Решение. Имеем $a=1$, $b=4$, $c=7$, и поэтому $D=4^2-4\cdot1\cdot7=$ $=16-28=-12$. Уравнение не имеет действительных корней.

Таким образом, по знаку числа $D=b^2-4ac$ можно узнать, сколько корней имеет уравнение $ax^2+bx+c=0$:

1) при $D>0$ уравнение имеет два корня;
2) при $D=0$ уравнение имеет один корень кратности 2;
3) при $D<0$ уравнение корней не имеет.

Поэтому число $D=b^2-4ac$ называют **дискриминантом***) уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Для приведенного квадратного уравнения $\boldsymbol{x^2+px+q=0}$ дискриминант $D=p^2-4q$, а формулы вычисления корней имеют вид

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}. \qquad (6)$$

Заметим, что не всегда целесообразно при решении квадратных уравнений пользоваться формулами (5) и (6).

Пример 4.

Решим уравнение:

а) $-2x^2+12=0$; б) $3x^2+7x=0$.

---

*) От латинского discriminatio — различение. По знаку дискриминанта различают, сколько корней имеет уравнение (1).

Решение. а) Выразим x^2, перенеся свободный член в правую часть уравнения и разделив обе части получившегося уравнения на -2: $-2x^2=-12$, $x^2=6$. Отсюда $|x|=\sqrt{6}$, т. е. $x_1=\sqrt{6}$, $x_2=-\sqrt{6}$.

б) Разложим левую часть уравнения на множители: $x(3x+7)=0$. Отсюда $x=0$ или $3x+7=0$. Значит, $x_1=0$, $x_2=-\frac{7}{3}$.

Квадратные уравнения, рассмотренные нами в примере 4, называют неполными квадратными уравнениями. В общем случае **неполным квадратным уравнением** называют квадратное уравнение, у которого или коэффициент при неизвестном, или свободный член, или они оба равны нулю. Такие уравнения могут иметь вид $ax^2+c=0$, $ax^2+bx=0$, $ax^2=0$.

Уравнение $ax^2+c=0$ имеет те же корни, что и уравнение $x^2+\frac{c}{a}=0$. Если $\frac{c}{a}>0$, то уравнение корней не имеет; если $\frac{c}{a}\leqslant 0$, то $-\frac{c}{a}\geqslant 0$ и $x^2+\frac{c}{a}=x^2-\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2=\left(x-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x+\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$. Значит, уравнение $x^2+\frac{c}{a}=0$ имеет два корня: $x_{1,\,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Уравнение $ax^2+bx=0$ имеет два корня: $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$, а уравнение $ax^2=0$ — один корень кратности 2: $x_1=0$.

УПРАЖНЕНИЯ

7. Назовите коэффициенты a, b и c, вычислите дискриминант и укажите число корней уравнения:

а) $2x^2+3x+1=0$; б) $x^2+5x-6=0$.

8. Не решая уравнения, скажите, сколько корней оно имеет:

а) $3x^2+7x+2=0$; в) $4x^2+4x+1=0$; д) $9x^2-6x+1=0$;
б) $2x^2+x+1=0$; г) $x^2+2x+2=0$; е) $4x^2-7x-2=0$.

9. Выведите формулы решения приведенного квадратного уравнения и квадратного уравнения с четным коэффициентом при x.

10. Решите уравнение:

а) $x^2+6x+8=0$; в) $5x^2-8x+3=0$; д) $3x^2-13x+14=0$;
б) $7x^2-2x-329=0$; г) $2x^2-3x-2=0$; е) $y^2-10y-24=0$.

11. Решите уравнение:

а) $5x^2=6x-1{,}75$; д) $m^2+5m+4=-6-2m$;
б) $\sqrt{2}x^2-10x=-8\sqrt{2}$; е) $(x-1)(x-2)-(x-2)(x-3)=2(x-2)(x-4)$;
в) $25y^2+1=10y$;
г) $k^2-28k=k-100$; ж) $11x^2+7x-\frac{3}{7}=4x(x+1)+1$.

12. Решите уравнение:

а) $5x^2-4x=0$; е) $(x+3)(x-4)=-12$;

б) $1-4x^2=0$; ж) $(3y-1)^2-1=0$;

в) $2+3x^2=0$; з) $(a-1)(a+1)=2(a^2-3)$;

г) $4a^2+3a=0$; и) $x^2-5=(x+5)(2x-1)$;

д) $2y^2-6=0$; к) $(2y+3)(3y+1)=11y+30$.

13. Решите уравнение с буквенными коэффициентами:

а) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$; д) $x(x+3)+a(a-3)=2(ax-1)$;

б) $x^2-2(a+b)x+4ab=0$; е) $(x-a)^2+(x-b)^2=(a-b)^2$;

в) $x^2-3ax+2a^2=0$; ж) $x+\frac{1}{a}=a+\frac{1}{x}$;

г) $x^2-ax-2a^2=0$; з) $\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=2$.

14. Выясните, при каком значении параметра a уравнение:

а) $(a^2-2a-3)x+a+1=0$; в) $(a^2-a-2)x+a^2-2a-3=0$

б) $(2a+6)x-a^2+a-6=0$;

имеет один корень; бесконечное множество корней; не имеет корней.

15. Определите m так, чтобы выражение было полным квадратом:

а) $x^2-2(2+m)x+12+m^2$; б) $2mx^2+(2m-4)x+\frac{1}{2}m+3$.

16. Докажите, что квадратное уравнение не имеет действительных корней ни при каких значениях переменных k, a, b:

а) $(1+k^2)x^2+k^2x+2+k^2=0$; б) $(1+a^2)x^2+2abx+1+b^2=0$.

17. При каком значении m уравнение имеет равные корни:

а) $(m-1)x^2+2(m+1)x+(m-2)=0$; в) $x^2-4bx+4ab+m^2-2mx=0$?

б) $x^2+2(m-4)x+m^2+6m+3=0$;

18. Докажите, что если коэффициенты a и c имеют противоположные знаки, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня.

19. В уравнении $3x^2-6x+m=0$ определите параметр m так, чтобы левая часть уравнения представляла:
а) сумму двух квадратов; б) разность двух квадратов; в) точный квадрат.

20. При каких значениях m квадратное уравнение $(2m-1)x^2-2(m+1)x+0{,}5m=0$ имеет:
а) действительные различные корни с одинаковыми знаками;
б) действительные равные корни?

21. При каких рациональных значениях k корни уравнения являются рациональными числами:

а) $(k+1)x^2+(2k-3)x+k-1=0$; б) $x^2-(2k+1)x+k^2-3=0$?

Мы доказали в пункте 2 при $D>0$ тождество

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)$$

и вывели из него, что корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ имеют вид $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Поэтому это тождество можно записать в виде

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2).$$

Умножая обе части получившегося тождества на a, получаем

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2). \qquad (1)$$

Таким же образом устанавливаем, что при $D=0$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2, \qquad (2)$$

где x_1 — единственный корень уравнения $ax^2+bx+c=0$. Если же $D<0$, то квадратный трехчлен не разлагается на множители, так как в этом случае уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней, а уравнение, разложенное на линейные множители, всегда имеет корни.

Итак, доказана следующая теорема:

Теорема. Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни x_1 и x_2, то справедливо тождество (1). В случае, когда уравнение имеет лишь один корень x_1, справедливо тождество (2). Если уравнение не имеет корней, то квадратный трехчлен ax^2+bx+c не разлагается на множители.

Пример 1.

Разложим на множители трехчлен $4x^2-7x+3$.

Решение. В примере 1 п. 2 были найдены корни уравнения $4x^2-7x+3=0$: числа 1 и $\frac{3}{4}$. Поэтому

$$4x^2-7x+3=4(x-1)\left(x-\frac{3}{4}\right).$$

Это разложение можно представить в виде $4x^2-7x+3=(x-1)(4x-3)$.

Пример 2.

Разложим на множители трехчлен $4x^2-12x+9$.

Решение. Решая квадратное уравнение $4x^2-12x+9=0$, находим, что уравнение имеет один корень $x_1=\frac{3}{2}$ кратности 2. Поэтому

$$4x^2-12x+9=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=(2x-3)^2.$$

Пример 3.

Разложим на множители многочлен $9x^2-30xy+24y^2$.

Решение. Решим уравнение $9x^2-30xy+24y^2=0$ относительно x. Коэффициенты уравнения $a=9$, $b=-30y$, $c=24y^2$ и, следовательно,

$$D=b^2-4ac=(-30y)^2-4\cdot 9\cdot 24y^2=900y^2-864y^2=36y^2.$$

Поэтому $x_{1,2}=\frac{30y\pm\sqrt{36y^2}}{18}=\frac{30y\pm 6y}{18}$ *). Значит, $x_1=2y$, $x_2=\frac{4}{3}y$ и

$$9x^2-30xy+24y^2=9(x-2y)\left(x-\frac{4}{3}y\right)=(x-2y)(9x-12y).$$

УПРАЖНЕНИЯ

22. Разложите на множители квадратный трехчлен, предварительно решив соответствующее квадратное уравнение:

а) x^2-6x+7;
б) $x^2-15x+26$;
в) $x^2+7x-44$;
г) $x^2+25x+100$;
д) $x^2+7x+10$;
е) $x^2-17x+72$;
ж) $2x^2+3x-6{,}48$;
з) $2y^2-y-6$;
и) $16x^2-56x+45$;
к) $-x^2+6x+27$;
л) $4x^2+28x+49$;
м) $9x^2-48x+64$;
н) $x^2+3x-108$;
о) $x^2+5{,}9x+8{,}5$;
п) $30x^2+37x+49$;
р) $6x^2-7x+1$.

23. Разложите на множители трехчлен:

а) $y^2-ay-(ab+b^2)$;
б) $z^2-(2ab+c)z+2abc$;
в) $x^2+ax-(a\sqrt{b}+b)$;
г) $(1-a^2)x^2-4ax-(1-a^2)$.

24. Разложите на множители квадратный трехчлен относительно x и y:

а) $5x^2-7xy+2y^2$;
б) $6x^2+17xy+11y^2$;
в) $x^2-2xy-3y^2$;
г) $x^2-3xy-40y^2$.

*) Поскольку $\pm|6y|=\pm 6y$.

25. Сократите дробь:

а) $\frac{y^2+y-12}{y^2+8y+16}$; б) $\frac{4m^2+12m+9}{2m^2-m-6}$; в) $\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$.

26. Пусть x_1 — корень уравнения $ax^2+bx+c=0$, т. е. пусть $ax_1^2+bx_1+c=0$. Докажите, что тогда $ax^2+bx+c=a\left(x+x_1+\frac{b}{a}\right)(x-x_1)$.

4. ТЕОРЕМА ВИЕТА

Мы вывели в пункте 3 тождество $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Раскроем скобки в правой части этого тождества:

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2$, т. е. $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$.

Отсюда следует, что $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Мы доказали следующую теорему, впервые установленную Ф. Виетом:

Теорема 1 *(Виета). Сумма корней квадратного уравнения* равна коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком и деленному на коэффициент при x^2; *произведение корней этого уравнения* равно свободному члену, деленному на коэффициент при x^2:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad (1)$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}. \qquad (2)$$

Справедливо и обратное утверждение:

Теорема 2 (обратная). Если выполняются равенства

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ и } x_1x_2=\frac{c}{a},$$

то числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Доказательство.

Из равенств $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$ следует, что $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$.

Но $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=(x-x_1)(x-x_2)$ и поэтому

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2).$$

В силу теоремы пункта 1 отсюда следует, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, а поэтому и уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Замечание.

Формулы $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$ остаются верными и в случае, когда уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет один корень x_1 кратности 2, если положить в указанных формулах $x_2=x_1$. Поэтому принято считать, что при $D=0$ уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два совпадающих друг с другом корня.

Теоремы Виета могут быть использованы при исследовании корней квадратного уравнения по коэффициентам и дискриминанту. Например, исследуем корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ в зависимости от знаков p и q. Если $q<0$, то $D=p^2-4q>0$, значит, уравнение имеет два различных корня x_1 и x_2. А так как $x_1\cdot x_2=q<0$, то корни имеют разные знаки. При этом $x_1+x_2=-p$. Отсюда следует, что при $p>0$ отрицательный корень имеет большую абсолютную величину, а при $p<0$ положительный корень имеет большую абсолютную величину. Если же $p=0$, то корни равны по абсолютной величине.

Аналогичные исследования корней можно провести для случаев $q=0$, $q>0$.

Пример 1.

Не решая уравнения, выясним, сколько оно имеет положительных и сколько отрицательных корней:

а) $x^2-373x-111=0$; б) $3x^2-11x+435=0$; в) $2x^2+7x+1=0$.

Решение.

а) Так как $q=-111<0$, то $D>0$ и уравнение имеет два корня: один отрицательный и один положительный.

б) Так как уравнение $3x^2-11x+435=0$ имеет те же корни, что и уравнение $x^2-\frac{11}{3}x+\frac{435}{3}=0$, а $D=\left(\frac{11}{3}\right)^2-4\cdot\frac{435}{3}=\frac{121}{9}-4\cdot145<0$, то данное уравнение корней не имеет.

в) Уравнение $2x^2+7x+1=0$ имеет те же корни, что и уравнение $x^2+\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}=0$. Так как $D=\left(\frac{7}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}=\frac{49}{4}-2>0$, то уравнение имеет два различных корня. Из того, что $x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}>0$, заключаем, что корни

имеют одинаковые знаки, а так как $x_1+x_2=-\frac{7}{2}$, то данное уравнение имеет два отрицательных корня.

Рассмотрим пример построения квадратного уравнения, корни которого заданы некоторыми условиями.

Пример 2.

Составим приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней уравнения $x^2-12x+5=0$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-12x+5=0$, тогда искомое уравнение имеет коэффициенты $p=-(x_1^2+x_2^2)=-(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2)=2x_1x_2-(x_1+x_2)^2$, $q=x_1^2\cdot x_2^2=(x_1\cdot x_2)^2$.

Так как по теореме Виета

$$x_1+x_2=12,\ x_1\cdot x_2=5,\ \text{то}\ p=2\cdot 5-12^2=-134,\ q=5^2=25.$$

Искомое квадратное уравнение имеет вид $x^2-134x+25=0$.

УПРАЖНЕНИЯ

27. Не решая уравнения, найдите сумму и произведение корней, если корни существуют:

а) $4y^2-15=0$; г) $\frac{1}{2}z^2+z-7=0$;

б) $2x^2-24x=0$; д) $x^2-9x+20=0$;

в) $2x^2-9x-10=0$; е) $x^2+2x-80=0$.

Сформулируйте теорему Виета и обратную к ней для приведенного квадратного уравнения.

28. Составьте квадратное уравнение по его корням:

а) 5 и 2; б) $-0{,}5$ и 10; в) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$; г) $-\frac{4}{5}$ и $-\frac{4}{5}$.

29. Решите уравнение и проверьте ответ по теореме Виета:

а) $3x^2-4x-4=0$; в) $2x^2+7x+6=0$;

б) $x^2-2x-9=0$; г) $2x^2+9x+8=0$.

30. Могут ли числа:

а) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$; б) ab и $\frac{1}{ab}$

быть корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$?

31. а) Один из корней уравнения $x^2+px-35=0$ равен 7. Найдите другой корень и коэффициент p.

б) Один из корней уравнения $x^2-x+a=0$ равен 2. Найдите другой корень и коэффициент a.

в) Один из корней уравнения $5x^2+bx+24=0$ равен 8. Найдите другой корень и коэффициент b.

г) Один из корней уравнения $10x^2-32x+c=0$ равен 5,3. Найдите другой корень и коэффициент c.

д) Один из корней уравнения $ax^2-6x+15=0$ равен 10. Найдите другой корень и коэффициент a.

е) Разность корней уравнения $x^2-12x+q=0$ равна 2. Найдите значение q.

ж) Разность корней уравнения $x^2+x+c=0$ равна 6. Найдите c.

з) Найдите подбором корни уравнений

$$x^2+16x+63=0 \text{ и } x^2-19x+88=0.$$

32. Не решая квадратного уравнения, найдите знаки его корней (если корни существуют):

а) $x^2+7x-1=0$; в) $5x^2+17x+16=0$; д) $2x^2+\sqrt{3}x+11=0$;

б) $x^2-7x+1=0$; г) $19x^2-23x+5=0$; е) $11x^2-9x+7-5\sqrt{2}=0$.

33. Дано уравнение $x^2+5x-4=0$ с корнями x_1 и x_2. Составьте квадратное уравнение с корнями:

а) $y_1=\dfrac{1}{x_1}$ и $y_2=\dfrac{1}{x_2}$;

б) $y_1=x_1\cdot x_2^2$ и $y_2=x_2\cdot x_1^2$;

в) $y_1=\dfrac{x_1}{x_2^2}$ и $y_2=\dfrac{x_2}{x_1^2}$;

г) $y_1=\dfrac{x_1}{x_2}$ и $y_2=\dfrac{x_2}{x_1}$;

д) $y_1=x_1+\dfrac{1}{x_1}$ и $y_2=x_2+\dfrac{1}{x_2}$;

е) $y_1=\dfrac{1}{x_1^2}$ и $y_2=\dfrac{1}{x_2^2}$;

ж) $y_1=x_1+2x_2$ и $y_2=x_2+2x_1$;

з) $y_1=x_1^4$ и $y_2=x_2^4$.

34. Не решая уравнения $x^2+4x-5=0$, составьте новое уравнение, корнями которого были бы кубы корней данного уравнения.

1) $y^2+124y-125=0$; 3) $y^2-124y+120=0$;

2) $y^2+12y+25=0$; 4) $y^2+124y+125=0$.

35. Не решая уравнения $x^2-3x+1=0$, найдите сумму четвертых степеней его корней.

36*. Выразите через σ_1 и σ_2 симметрические многочлены:

а) $x^3+4x^2y+4xy^2+y^3$; б) $x^5+6x^4y-10x^3y^2-10x^2y^3+6xy^4+y^5$.

37. Дано квадратное уравнение $2x^2+3x-5=0$, имеющее корни α и β. Составьте новое квадратное уравнение, корнями которого были бы

$$\alpha_1=2\alpha+\frac{3}{\beta} \text{ и } \beta_1=2\beta+\frac{3}{\alpha}.$$

38. Решите предыдущую задачу в случае:

а) $3x^2+7x+4=0$, $\alpha_1=\dfrac{\alpha}{\beta-1}$ и $\beta_1=\dfrac{\beta}{\alpha-1}$;

б) $x^2-4x+3=0$, $\alpha_1=\dfrac{\alpha}{2\alpha+\beta}$ и $\beta_1=\dfrac{\beta}{2\beta+\alpha}$.

Из этого равенства следует, что $28(x+1)+25x-12x(x+1)=0$, причем $x(x+1)\neq 0$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем уравнение $-12x^2+41x+28=0$. Корнями этого уравнения являются числа $x_1=-\frac{7}{12}$, $x_2=4$. Однако условию задачи может удовлетворять только положительный корень $x=4$. Следовательно, первая часть капитала приносит 4%, а вторая — 5%.

УПРАЖНЕНИЯ

46. Найдите периметр прямоугольника, длина которого на 4 см больше его ширины, а площадь равна 60 см^2.

47. Периметр прямоугольника 62 м. Найдите его стороны, если площадь прямоугольника равна 210 м^2.

48. Произведение двух последовательных натуральных чисел больше их суммы на 109. Найдите эти числа.

49. Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел больше суммы их квадратов на 112. Найдите эти числа.

50. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 8 : 15, а гипотенуза равна 6,8 м. Найдите площадь треугольника.

51. Отношение гипотенузы прямоугольного треугольника к его катету равно 13 : 12, а другой катет равен 15 см. Найдите периметр треугольника.

52. Найдите на оси Oy точки, удаленные от точки $A(8;\ 3)$ на 17 единиц.

53. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2+1}{2}-x=2$;

б) $x\cdot\frac{x+1}{6}-2x=2$;

в) $3-\frac{x+2}{4}\cdot x=x+5$;

г) $\frac{3x+4}{5}-\frac{x^2-4x-6}{10}=-1$;

д) $\frac{(y+1)^2}{12}-\frac{7-y}{4}=\frac{y}{2}$;

е) $\frac{3-y}{5}=\frac{y-2}{4}+\frac{(y-2)^2}{8}$;

ж) $\frac{2x^2}{x-2}=\frac{7x-6}{x-2}$;

з) $\frac{x^2+6x}{x-5}=\frac{5}{5-x}$;

и) $\frac{2x-1}{x+7}=\frac{3x+4}{x-1}$;

к) $\frac{5y+1}{y+1}=\frac{y+2}{y}$;

л) $\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$;

м) $\frac{3x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=1$.

54. Решите уравнение:

а) $\frac{4}{9y^2-1}-\frac{4}{3y+1}-\frac{y}{1-3y}=0$;

б) $\frac{4}{x+3}-\frac{5}{3-x}=\frac{1}{x-3}-1$;

в) $\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{3(2x-1)}{7(2x+1)}-\frac{8x}{4x^2-1}=0$;

г) $\frac{2y-5}{y^2-3y}-\frac{y+2}{y^2+3y}+\frac{y-5}{y^2-9}=0$.

55. При каких значениях y сумма дробей $\frac{y+1}{y-5}$ и $\frac{10}{y+5}$ равна их произведению?

56. При каких значениях x разность дробей $\frac{6}{x-4}$ и $\frac{x}{x+2}$ равна их произведению?

57. Числитель дроби на 1 больше ее знаменателя. Если прибавить к числителю 3, а к знаменателю 18, то полученная дробь будет на 1 меньше исходной. Найдите исходную дробь.

58. Велосипедист проехал расстояние 67 км за 4 ч, причем на последних 27 км пути его скорость была на 2 км/ч больше, чем на предыдущем участке пути. Сколько времени затратил велосипедист на последние 27 км пути?

59. Велосипедист выехал из города в поселок по дороге, длина которой 24 км, а возвратился по другой дороге, длиной 30 км. Несмотря на то что на обратном пути он увеличил скорость на 2 км/ч, на обратный путь он затратил на 6 мин больше, чем на путь из города в поселок. С какой скоростью возвращался велосипедист?

60. Повысив скорость поезда на 10 км/ч, удалось сократить на 1 ч время, затрачиваемое на прохождение пути в 720 км. Найдите первоначальную скорость поезда.

61. Из пункта A в пункт B, расстояние до которого равно 33 км, одновременно выехали два велосипедиста. Один из них, двигаясь со скоростью, превышающей скорость другого велосипедиста на 4 км/ч, прибыл в пункт B на 48 мин раньше, чем другой. Сколько времени находился в пути каждый велосипедист?

62. Теплоход прошел 9 км по озеру и 20 км по течению реки за 1 ч. Найдите скорость теплохода при движении по озеру, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

63. Турист проплыл на лодке 6 км по реке против течения и 15 км по озеру, затратив на путь по озеру на 1 ч больше, чем на путь по реке. Зная, что скорость течения реки равна 2 км/ч, найдите скорость лодки при движении по озеру.

64. Моторная лодка прошла 45 км по течению реки и 22 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Найдите скорость лодки при движении против течения реки, зная, что скорость течения реки 2 км/ч.

65. Катер, развивающий в стоячей воде скорость 20 км/ч, прошел 36 км против течения и 22 км по течению реки за 3 ч. Найдите скорость течения реки.

66. Урожай с участка сначала убирал один комбайн. Через 4 ч после начала работы к нему присоединился второй, и, проработав совместно 8 ч, они закончили уборку урожая с участка. За сколько часов мог бы убрать урожай с участка каждый комбайн, работая отдельно, если известно, что первому понадобилось бы на 8 ч больше, чем второму?

67. Две машинистки получили для перепечатки рукопись. После 2 ч совместной работы одна из них получила другое задание, и вторая, оставшись одна, закончила рукопись за 1 ч 20 мин. За сколько часов могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка, если второй на это понадобилось бы на 1 ч 10 мин больше, чем первой?

68. Ученики школы по ее окончании обменялись карточками каждый с каждым. При этом всего потребовалось 210 карточек. Сколько учеников окончили школу в этом году?

69. Парус имеет форму прямоугольного треугольника. На его изготовление пошло 15 $м^2$ ткани, длина его, считая по большему катету, на 3,5 м больше ширины. Какова длина и ширина паруса?

70. В ромбе одна диагональ длиннее другой на 8 см. Сторона же ромба 2 дм. Определите площадь ромба.

71. Некто открыл счет в банке, положив на него 30 000 р. Через год он положил на свой счет еще 50 000 р. В конце второго года на счете оказалось 103 200 р. Сколько процентов в год платил банк?

72. Существует ли такой прямоугольный треугольник, стороны которого выражаются тремя последовательными четными или нечетными числами?

73. Из поселка расходятся две дороги под прямым углом друг к другу по направлению к двум железнодорожным станциям. Расстояние между станциями по прямой линии равно 37 км, если же идти с одной станции на другую через поселок, то придется пройти 47 км. Сколько километров от поселка до каждой станции?

74. Ученик купил 2 подержанных учебника в букинистическом магазине, из которых первый стоит по номинальной цене на 150 р. дороже второго. При покупке была сделана скидка в размере 150 р. на каждый учебник, при этом на первый учебник была скидка на 5% меньше, чем на второй. Сколько заплатил ученик за обе книги?

75. Предмет первоначально стоил 50 р. После двух последовательных снижений цен он стал стоить 36 р. При этом процент снижения во второй раз был в 2 раза больше, чем процент снижения в первый раз. На сколько процентов снижалась цена каждый раз?

76. Продано некоторое количество ученических тетрадей на 144 р. и на ту же сумму продано карандашей на 16 штук больше, чем тетрадей. Карандаш на 1,5 р. дешевле тетради. Сколько продано тетрадей и карандашей?

77. Покупатель приобрел в магазине на 480 р. несколько метров материи. Если бы он заплатил за метр двадцатью рублями меньше, то на ту же сумму мог бы купить двумя метрами больше. Сколько метров материи куплено?

§ 2. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, СВОДЯЩИЕСЯ К КВАДРАТНЫМ УРАВНЕНИЯМ

6. УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К КВАДРАТНЫМ

Многие уравнения приводятся к квадратным с помощью удачной подстановки.

Пример 1.

Решим уравнение

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0. \quad (1)$$

Решение. Так как $x^4 = (x^2)^2$, то это уравнение можно записать следующим образом: $(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$. Положив $x^2 = y$, получаем квадратное уравнение относительно y:

$$y^2 - 13y + 36 = 0. \quad (2)$$

Решим это уравнение по формуле корней квадратного уравнения:

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 169 - 144 = 25,$$

$$y_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}.$$

Значит, уравнение (2) имеет два корня: $y_1 = 9$ и $y_2 = 4$. Но $y = x^2$. Поэтому, чтобы найти x, осталось решить два уравнения: $x^2 = 9$ и $x^2 = 4$. Из первого уравнения находим два корня $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$, а из второго — еще два корня $x_3 = 2$ и $x_4 = -2$. Значит, уравнение (1) имеет четыре корня: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$.

Уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называют **биквадратными**. Видим, что для решения биквадратных уравнений надо сделать подстановку $x^2 = y$, найти корни y_1 и y_2 квадратного уравнения $ay^2 + by + c = 0$ и решить уравнения $x^2 = y_1$ и $x^2 = y_2$. Они имеют решения лишь в случае, когда $y_1 \geqslant 0$ (соответственно $y_2 \geqslant 0$).

Пример 2.

Решим уравнение

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0. \quad (3)$$

Решение. Сделаем подстановку $x^2 = y$. Получим квадратное уравнение $y^2 + 5y - 36 = 0$. Его корнями являются числа $y_1 = 4$ и $y_2 = -9$. Для нахождения x осталось решить уравнения $x^2 = 4$ и $x^2 = -9$. Первое из них

имеет корни 2 и -2, а второе уравнение не имеет действительных корней. Значит, уравнение (3) имеет два корня: $x_1=2$ и $x_2=-2$.

Решение биквадратных уравнений приводит к выражениям вида $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, рассмотренным нами в пункте 21 предыдущей главы. В самом деле, решая уравнение $ay^2+by+c=0$, получаем $y_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Решая затем уравнения $x^2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, получаем, что биквадратное уравнение может иметь четыре корня: $x=\pm\sqrt{\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}=$ $=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}}$. Полагая $A=-\dfrac{b}{2a}$, $B=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$, видим, что решение биквадратного уравнения привело к выражению $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$. По формуле (1) пункта 21 главы V имеем $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

Так как $A^2-B=\dfrac{b^2}{4a^2}-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=\dfrac{c}{a}$, то получаем следующие формулы вычисления корней биквадратного уравнения:

$$x=\pm\left(\sqrt{-\frac{b}{4a}+\sqrt{\frac{c}{4a}}}\pm\sqrt{-\frac{b}{4a}-\sqrt{\frac{c}{4a}}}\right).$$

Конечно, нет смысла запоминать эти формулы, но они могут быть полезны при исследовании связей между коэффициентами и корнями биквадратного уравнения.

Подстановкой, т. е. переходом к новой неизвестной, можно привести к решению квадратного уравнения не только биквадратные уравнения. Это можно сделать во всех тех случаях, когда уравнение является квадратным относительно некоторого выражения, содержащего неизвестное.

Пример 3.

Решим уравнение

$$(2x-1)^4-25(2x-1)^2+144=0. \qquad (4)$$

Решение. Сделаем подстановку $(2x-1)^2=y$. Тогда имеем

$$y^2-25y+144=0. \qquad (5)$$

Корнями уравнения (5) являются числа $y_1=16$, $y_2=9$. Чтобы найти корни уравнения (4), надо решить два уравнения:

$$(2x-1)^2=16 \text{ и } (2x-1)^2=9.$$

Решим уравнение $(2x-1)^2=16$. Его можно записать следующим образом: $(2x-1)^2-4^2=0$, т. е. $(2x-5)(2x+3)=0$. Решая это квадратное уравнение, получаем, что $x_1=\frac{5}{2}$ и $x_2=-\frac{3}{2}$. Точно так же находим корни уравнения $(2x-1)^2=9$. Ими являются числа $x_3=2$, $x_4=-1$.

Итак, уравнение (4) имеет корни $x_1=\frac{5}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x_3=2$, $x_4=-1$.

УПРАЖНЕНИЯ

78. Применив подстановку, решите уравнение:

а) $(5x+1)^2+6(5x+1)-7=0$;

б) $(x^2-9)^2-8(x^2-9)+7=0$;

в) $(2x^2+3x)^2-7(2x^2+3x)=-10$;

г) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)-4=0$;

д) $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1}$;

е) $(y^2+2y+4)^2-7(y^2+2y+4)+12=0$;

ж) $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$;

з) $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{142}{9}$.

79. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4+x^2-2=0$; б) $x^4-8x^2-9=0$; в) $y^4-7y^2-144=0$; г) $36z^4-13z^2+1=0$; д) $16x^4-10x^2+1=0$; е) $x^4+15x^2+50=0$; ж) $y^4-8y^2+16=0$; з) $9y^4-6y^2+1=0$; и) $x^4-25x^2=0$; к) $x^4+0{,}16x^2=0$.

80. Докажите, что уравнение $2x^4+3x^2+1=0$ не имеет действительных корней.

81. Найдите точки пересечения с осями координат графика функции:

а) $y=x^4-10x^2+9$; б) $y=x^4+2x^2+6$; в) $y=x^4-2x^2-3$; г) $y=x^4+36x^2$.

82. Почему биквадратное уравнение, имеющее корень, равный m, имеет также и второй корень, равный $-m$?

83. Один из корней биквадратного уравнения равен 2, а другой корень $2\sqrt{2}$. Составьте уравнение.

1) $x^4+12x^2+32=0$; 2) $x^4-12x^2+32=0$; 3) $x^4+12x^2-32=0$; 4) $x^4-12x^2-32=0$.

84. Составьте биквадратное уравнение, сумма квадратов корней которого равна 26, а произведение равно 36.

85. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^4-11a^2+24}{a^4-17a^2+72}$; б) $\dfrac{x^4-2(a^2+b^2)x^2+4a^2b^2}{x^4-2(2a^2+b^2)x^2+8a^2b^2}$.

86. Зная, что m и n — корни уравнения $x^2+px+q=0$, найдите биквадратное уравнение, имеющее корни $-m$, $-n$, m и n.

87. Докажите, что если x_1, x_2, x_3, x_4 — корни биквадратного уравнения $x^4+x^2-2=0$, то они связаны соотношением $x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

7*. ВОЗВРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом пункте мы рассмотрим еще одно уравнение четвертой степени, решение которого можно свести к решению квадратного уравнения.

Рассмотрим уравнение четвертой степени

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,\ a\neq 0. \qquad (1)$$

Обратим внимание, что в этом уравнении коэффициенты, одинаково удаленные от начала и от конца, равны. Такие уравнения в алгебре называют **возвратными уравнениями**. Так как $a\neq 0$, то $x=0$ не является корнем этого уравнения. Разделив обе части уравнения (1) на x^2 и сгруппировав члены с одинаковыми коэффициентами, получим

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Сделаем теперь подстановку $z=x+\dfrac{1}{x}$. Тогда

$$z^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2},\ x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2.$$

Значит, предыдущее уравнение принимает вид $a(z^2-2)+bz+c=0$. Решив это квадратное уравнение, найдем его корни z_1 и z_2. Чтобы найти x, необходимо решить уравнения

$$x+\frac{1}{x}=z_1 \text{ и } x+\frac{1}{x}=z_2.$$

Каждое из этих уравнений также сводится к квадратным уравнениям $x^2-z_1x+1=0$ и $x^2-z_2x+1=0$.

Пример 1.

Решим уравнение $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.

Решение. Разделим обе части на x^2 и сгруппируем члены с одинаковыми коэффициентами:

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0.$$

Сделав подстановку $z = x + \frac{1}{x}$, получим $6(z^2 - 2) - 35z + 62 = 0$, или $6z^2 - 35z + 50 = 0$.

Решая последнее уравнение, находим $z_1 = \frac{5}{2}$, $z_2 = \frac{10}{3}$.

Чтобы найти множество корней исходного уравнения, надо решить два уравнения

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \text{ и } x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}, \text{ или } 2x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ и } 3x^2 - 10x + 3 = 0.$$

Решая их, находим множество корней исходного уравнения $\left\{2; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{3}\right\}$.

Аналогично решаются уравнения вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$, которые отличаются от возвратных уравнений лишь тем, что коэффициенты при нечетных степенях имеют противоположные знаки.

Представив это уравнение в виде $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0$, положим $z = x - \frac{1}{x}$. Тогда $z^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$, откуда $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 + 2$.

Поэтому получаем квадратное уравнение $a(z^2 + 2) + bz + c = 0$.

Пример 2.

Решим уравнение $x^4 - 3x^3 - \frac{4}{9}x^2 + 3x + 1 = 0$.

Решение. Разделим обе части на x^2 и, положив $z = x - \frac{1}{x}$, получим $(z^2 + 2) - 3z - \frac{4}{9} = 0$, или $z^2 - 3z + \frac{14}{9} = 0$.

Решая полученное квадратное уравнение, находим $z_1 = \frac{7}{3}$ и $z_2 = \frac{2}{3}$. Затем решаем два уравнения $x - \frac{1}{x} = \frac{7}{3}$ и $x - \frac{1}{x} = \frac{2}{3}$, или $3x^2 - 7x - 3 = 0$ и $3x^2 - 2x - 3 = 0$. Решая эти уравнения, находим множество корней исходного уравнения $\left\{\frac{7 \pm \sqrt{85}}{6}; \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}\right\}$.

УПРАЖНЕНИЯ

88. Решите уравнение:

а) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$;

б) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$;

в) $5x^4 - 12x^3 + 14x^2 - 12x + 5 = 0$;

г) $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$.

89. Докажите, что если α — корень возвратного уравнения, то $\frac{1}{\alpha}$ тоже корень этого уравнения.

Решение некоторых задач приводит к уравнениям второй степени, содержащим два неизвестных, т. е. таким уравнениям, которые содержат квадраты одного или двух неизвестных или произведение двух неизвестных. В общем виде такие уравнения можно записать следующим образом:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Такого вида уравнения называют **неопределенными уравнениями второй степени.** В задачах, приводящих к таким уравнениям, даются, как правило, дополнительные условия, по которым можно составить еще одно уравнение и затем решить систему двух уравнений.

Задача.

Найдем длины сторон прямоугольника, если его периметр равен 16 м, а площадь равна 15 м^2.

Решение. Обозначим длины сторон прямоугольника буквами x и y. По условию задачи должны выполняться равенства $2x+2y=16$, т. е. $x+y=8$ и $xy=15$.

Таким образом, задача свелась к решению *системы уравнений*

$$\begin{cases} x+y=8, \\ xy=15, \end{cases}$$

т. е. к отысканию значений x и y, подстановка которых в оба уравнения системы обращает их в верные числовые равенства.

Из первого уравнения находим, что $y=8-x$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем $x(8-x)=15$, т. е. $8x-x^2=15$, или

$$x^2-8x+15=0. \qquad (1)$$

Решая это уравнение, находим $x_1=5$, $x_2=3$. Поскольку $y=8-x$, то при $x_1=5$ получаем $y_1=3$, а при $x_2=3$ имеем $y_2=5$. В обоих случаях получаем один и тот же прямоугольник, длины сторон которого равны 3 м и 5 м.

Замечание. Уравнение (1) можно вывести быстрее, используя теорему, обратную теореме Виета: так как сумма чисел x и y равна 8, а их произведение равно 15, то эти числа являются корнями уравнения $z^2-8z+15=0$.

Рассмотрим некоторые случаи систем, содержащих уравнения второй степени с двумя неизвестными, решения которых можно свести к решению квадратных уравнений с одним неизвестным.

1. Если в одно уравнение системы какое-нибудь неизвестное входит лишь в первой степени, то из этого уравнения можно выразить это неизвестное через другое и подставить полученное выражение во

второе уравнение системы. Получится уравнение с одним неизвестным. Решая его, находим значения этого неизвестного, а потом по ним находим значения оставшегося неизвестного.

Пример 1.

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x+y=11, \\ x^2+y^2=53. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения находим, что $y=11-2x$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем

$$x^2+(11-2x)^2=53.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$x^2+121-44x+4x^2=53,$$

и потому $5x^2-44x+68=0$. Значит, для нахождения x надо решить уравнение

$$5x^2-44x+68=0.$$

Решая его, находим $D=(-44)^2-4\cdot 5\cdot 68=1936-1360=576$,

$$x_{1,2}=\frac{44\pm\sqrt{576}}{2\cdot 5}=\frac{44\pm 24}{10}.$$

Итак, $x_1=6{,}8$, $x_2=2$. Но если $x_1=6{,}8$, то $y_1=11-2\cdot 6{,}8=-2{,}6$, а если $x_2=2$, то $y_2=11-2\cdot 2=7$.

Ответ: $x_1=6{,}8$, $y_1=-2{,}6$; $x_2=2$, $y_2=7$.

2. Если оба уравнения системы имеют вторую степень по каждому неизвестному, но из них можно вывести уравнение первой степени.

Пример 2.

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-2x-3y=-1, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

Решение. Если вычесть второе уравнение из первого, получим $-2x-3y=-11$, т. е. $2x+3y=11$. Значит, надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=11, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $x=\frac{11-3y}{2}$. Подставляя x во второе уравнение, получаем

$$\left(\frac{11-3y}{2}\right)^2+y^2=10,$$

откуда $121-66y+9y^2+4y^2=40$, т. е. $13y^2-66y+81=0$. Корнями этого квадратного уравнения служат $y_1=3$, $y_2=\frac{27}{13}$. Если $y_1=3$, то из $x=\frac{11-3y}{2}$ находим $x_1=1$. Если же $y_2=\frac{27}{13}$, то $x_2=\frac{31}{13}$.

Ответ: $x_1=1$, $y_1=3$ или $x_2=\frac{31}{13}$, $y_2=\frac{27}{13}$.

Пример 3.

Решим систему уравнений $\begin{cases} xy=12, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым. Получаем $x^2+y^2+2xy=49$, т. е. $(x+y)^2=7^2$. Значит, $x+y=7$ или $x+y=-7$. Нам надо теперь решить две системы уравнений:

$$\begin{cases} xy=12, \\ x+y=7 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} xy=12, \\ x+y=-7 \end{cases}$$

и объединить их решения.

Проще поступить иначе: умножим обе части первого уравнения системы на 2 и вычтем из второго уравнения. Получим $x^2+y^2-2xy=1$, т. е. $(x-y)^2=1$. Отсюда следует, что $x-y=1$ или $x-y=-1$. Комбинируя каждое из уравнений $x-y=1$, $x-y=-1$ с каждым из уравнений $x+y=7$, $x+y=-7$, получаем четыре системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=7, \end{cases} \begin{cases} x-y=1, \\ x+y=-7, \end{cases} \begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=7, \end{cases} \begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=-7. \end{cases}$$

Решая первую систему, получаем $x_1=4$, $y_1=3$. Из второй системы следует, что $x_2=-3$, $y_2=-4$, из третьей — что $x_3=3$, $y_3=4$, а из четвертой — что $x_4=-4$, $y_4=-3$.

Ответ: $x_1=4$, $y_1=3$; $x_2=-3$, $y_2=-4$; $x_3=3$, $y_3=4$; $x_4=-4$, $y_4=-3$.

3. Если одно из уравнений системы является однородным уравнением второй степени, т. е. все члены уравнения имеют степень 2, то его можно представить в виде квадратного уравнения относительно $\frac{x}{y}$ (или $\frac{y}{x}$). Затем из найденного отношения $\frac{x}{y}$ (или $\frac{y}{x}$) выражаем одно из неизвестных и подставляем во второе уравнение.

Пример 4.

Решим систему уравнений $\begin{cases} 8x^2-6xy+y^2=0, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение системы однородное, так как все его члены с ненулевыми коэффициентами ($8x^2$; $-6xy$; y^2) имеют степень 2. Заметим, что для решения системы выполняется условие $y \neq 0$. В самом деле, если $y=0$, то из первого уравнения системы следует, что и $x=0$, но пара чисел $x=0$, $y=0$ не удовлетворяет второму уравнению. Разделим обе части первого уравнения почленно на y^2. Получим уравнение

$$8\frac{x^2}{y^2}-6\frac{x}{y}+1=0.$$

Применим подстановку $z=\frac{x}{y}$. Тогда предыдущее уравнение примет вид $8z^2-6z+1=0$. Решая это квадратное уравнение, находим $z_1=\frac{1}{2}$, $z_2=\frac{1}{4}$. Таким образом, из первого уравнения находим $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$ или $\frac{x}{y}=\frac{1}{4}$. Выражая из этих равенств y через x и подставляя во второе уравнение, получаем два уравнения:

$$x^2+(2x)^2=5 \text{ и } x^2+(4x)^2=5.$$

Из первого уравнения находим $x_1=1$, $x_2=-1$, а из второго уравнения $x_3=\sqrt{\frac{5}{17}}$, $x_4=-\sqrt{\frac{5}{17}}$. Этим значениям неизвестного x соответствуют четыре значения неизвестного y: $y_1=2$, $y_2=-2$, $y_3=4\sqrt{\frac{5}{17}}$, $y_4=-4\sqrt{\frac{5}{17}}$.

Встречаются случаи, когда ни одно уравнение системы не является однородным, однако путем сложения или вычитания уравнений можно свести ее к системе, содержащей однородное уравнение второй степени.

Пример 5.

Решим систему уравнений $\begin{cases} y^2-xy=-12, \\ x^2-xy=28. \end{cases}$

Решение. Ни одно из уравнений не является однородным. Действительно, в первом уравнении члены y^2 и xy имеют степень 2, а -12 имеет нулевую степень: $-12=-12x^0\cdot y^0$. По той же причине не является однородным и второе уравнение. Но если умножить первое уравнение на 7, а второе на 3 и затем их сложить, то получим однородное уравнение $7y^2-10xy+3x^2=0$. Решая теперь систему уравнений $\begin{cases} 7y^2-10xy+3x^2=0, \\ x^2-xy=28, \end{cases}$ так же, как в примере 4, находим решение исходной системы:

$$x_1=7,\ y_1=3;\ x_2=-7,\ y_2=-3.$$

УПРАЖНЕНИЯ

90. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2-2xy=7, \\ x-3y=-2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy+3y^2=12, \\ x+3y=4; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^2+xy-y^2=11 \\ x-2y=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6xy-y^2=9, \\ 2x-y=-1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=24, \\ 2x-3y=0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^2+xy-3y=9, \\ 3x+2y=-1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-5xy=10, \\ x-5y=1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 4x^2-9y^2=15, \\ 2x+3y=5; \end{cases}$

91. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+10y=17, \\ x^2+4y^2=53; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2+5y=0. \end{cases}$

92. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x+y)(x-y)=0, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ x(y+6)=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ (x-3)(y-5)=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=50, \\ x^2-y^2=0. \end{cases}$

93. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=-8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=19, \\ xy=15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ xy=48; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-y^2-xy=44, \\ xy=-24. \end{cases}$

94. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ x^2-y^2=21; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x+y=10, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-\frac{5}{12}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x^2+3y^2=31, \\ 5x^2-y^2=-4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-y=6, \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{3}{20}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y=20, \\ x+2y=7; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1{,}5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2+y^2-6x+8y=1, \\ x^2+y^2-8x+6y=-5; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0{,}1, \\ y-2x=3. \end{cases}$

95. Периметр прямоугольника равен 82 м, а длина его диагонали 29 м. Найдите площадь прямоугольника.

96. Периметр прямоугольного треугольника равен 84 см, а длина его гипотенузы равна 37 см. Найдите длины катетов этого треугольника.

97. Длина участка прямоугольной формы равна 60 м, а ширина — 8 м. На сколько метров надо уменьшить длину и на сколько — ширину участка, чтобы его площадь уменьшилась вдвое, а периметр уменьшился на 44 м?

98. Периметр прямоугольника равен 80 м. Если одно из измерений прямоугольника увеличить на 8 м, а другое — на 2 м, то его площадь возрастет в полтора раза. Какие измерения имеет прямоугольник?

99. Длина диагонали прямоугольника равна 17 дм, а его площадь — 120 дм^2. Найдите длины сторон прямоугольника.

100. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 26 см, а его площадь — 120 см^2. Найдите периметр этого треугольника.

101. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов A и B, расстояние между которыми 28 км, и встретились через час. С какой скоростью двигался каждый велосипедист, если один из них прибыл в пункт B на 35 мин позже, чем другой в A?

102. Два поезда выходят одновременно из M и N, расстояние между которыми 45 км, и встречаются через 20 мин. Поезд, вышедший из M, прибывает на станцию N на 9 мин раньше, чем другой поезд в M. Какова скорость каждого поезда?

103. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2+(y-4)^2=6, \\ 4x-xy=2. \end{cases}$

104. Дана система уравнений $\begin{cases} x-y=a, \\ xy=1-a. \end{cases}$

а) Решите систему при $a=3$.
б) Решите систему в общем виде.
в) При каких a система имеет единственное решение?
г) При каких a система имеет решение $(x;\ y)$, такое, что $x=y$?

105. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy=0, \\ (x+y)^2-\frac{1}{2}y^2=-2. \end{cases}$

106. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+3y^2=7, \\ xy+y^2=3. \end{cases}$

107. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2-xy=6, \\ xy+y^2=4. \end{cases}$

108. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+xy=3, \\ y^2+xy=6. \end{cases}$

Напомним, что в пункте 17 главы II мы назвали симметрическим такой многочлен $P(x, y)$, для которого $P(x, y)=P(y, x)$.

При решении систем уравнений вида $\begin{cases} P_1(x, y)=0, \\ P_2(x, y)=0, \end{cases}$ где $P_1(x, y)$ и $P_2(x, y)$ — симметрические многочлены, полезной оказывается такая замена неизвестных: $x+y=u$, $xy=v$. Напомним, что любой симметрический многочлен $P(x, y)$ можно представить как выражение от u и v.

Пример 1.

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+xy+y^2=49, \\ x+y+xy=23. \end{cases}$

Решение. Сделаем замену неизвестных: $x+y=u$, $xy=v$. Система примет вид

$$\begin{cases} u^2-v=49, \\ u+v=23. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим уравнение $u^2+u-72=0$ с корнями $u_1=8$, $u_2=-9$. Соответственно $v_1=15$, $v_2=32$. Остается решить системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=8, \\ xy=15 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=-9, \\ xy=32. \end{cases}$$

Система $\begin{cases} x+y=8, \\ xy=15 \end{cases}$ имеет решения $x_1=3$, $y_1=5$; $x_2=5$, $y_2=3$.

Система $\begin{cases} x+y=-9, \\ xy=32 \end{cases}$ действительных решений не имеет.

Пример 2.

Решим систему $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13. \end{cases}$

Решение. Сначала введем неизвестные X и Y: $X=\dfrac{1}{x}$, $Y=\dfrac{1}{y}$, а затем U и V: $U=X+Y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, $V=XY=\dfrac{1}{xy}$.

Получается система $\begin{cases} U=5, \\ U^2-2V=13, \end{cases}$ из которой $U=5$, $V=6$. Далее, решая систему

$$\begin{cases} X+Y=5, \\ XY=6, \end{cases}$$

находим $X_1=2$, $Y_1=3$; $X_2=3$, $Y_2=2$, откуда получаем

$$x_1=\frac{1}{2},\ y_1=\frac{1}{3};\ x_2=\frac{1}{3},\ y_2=\frac{1}{2}.$$

Можно сразу ввести неизвестные U и V:

$$U=x+y,\ V=xy,$$

получится система $\begin{cases} U=5V, \\ U^2-2V=13V^2, \end{cases}$ приводящая к тем же решениям исходной системы.

УПРАЖНЕНИЯ

109. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x+y=1. \end{cases}$

110. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x+y=4. \end{cases}$

111. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3+y^3=28, \\ x+y=4. \end{cases}$

112. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x^3+y^3)(x+y)=\frac{26}{5}(x^2+y^2), \\ xy=-3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2-xy+y^2=7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=7, \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{25}{12}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=65; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^2y+xy^2=-2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19, \\ x-xy+y=7; \end{cases}$

з) $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}; \end{cases}$

к) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=16, \\ (x+y)(x^2+y^2)=40. \end{cases}$

Иногда в уравнениях некоторые коэффициенты не заданы конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами. Такие буквы называются **параметрами**. Предполагается, что эти параметры могут принимать любые числовые значения, т. е. одно уравнение с параметрами задает множество уравнений (для всех возможных значений параметров).

Например, линейное уравнение $ax+b=c$ с неизвестным x можно рассматривать как уравнение с параметрами a, b, c. Его решением при $a\neq 0$ является $x=\frac{c-b}{a}$. Если $a=0$, то получается «уравнение» $b=c$, и если действительно $b=c$, то корнями данного уравнения являются все действительные числа. Если же $b\neq c$, при этом $a=0$, то данное уравнение корней не имеет.

Решить уравнение с параметрами означает следующее:

1) исследовать, при каких значениях параметров уравнение имеет корни и сколько их при разных значениях параметров;

2) найти все выражения для корней и указать для каждого из них те значения параметров, при которых это выражение действительно определяет корень уравнения.

Ответ к задаче «решить уравнение с параметрами» должен выглядеть следующим образом: уравнение при таких-то значениях параметров имеет корни ..., при таких-то значениях параметров — корни ..., при остальных значениях параметров уравнение корней не имеет.

Пример.

Решим уравнение $px=6$ с неизвестным x и параметром p. Если $p\neq 0$, то можно разделить обе части уравнения на p, и тогда мы находим корень уравнения: $x=\frac{6}{p}$. Если $p=0$, то уравнение корней не имеет, потому что $0\cdot x=0$ для любого x. Ответ: при $p\neq 0$ уравнение имеет единственный корень $x=\frac{6}{p}$; при $p=0$ уравнение корней не имеет.

Аналогично выглядит ответ к задаче «решить систему уравнений с параметрами».

УПРАЖНЕНИЯ

113. При каких a уравнение $a^2+a(x-1)=2+\frac{7}{2x}$ имеет два различных корня x_1 и x_2, таких, что $x_1+x_2=0$?

114. Найдите все целые значения a, при которых уравнение $\frac{3-2a}{x-2}=\frac{2x}{a}$ имеет решение.

115. При каких m уравнение $\frac{m+3}{x+1}-\frac{5-3m}{x-2}=\frac{mx+3}{x^2-x-2}$ имеет решение? При каком m это уравнение имеет решение $x=1$?

116. Уравнение $x^2-(a+3)x+2a=0$ имеет корни x_1 и x_2, такие, что $x_1=4x_2$. Найдите a.

117. При каком a один из корней уравнения $x^2-\frac{15}{4}x+a=0$ равен квадрату другого?

118. При каких p квадрат разности корней уравнения $x^2-2x+p=0$ равен 16?

119. При каких k корни уравнения $x^2-(3k+2)x+k^2=0$ удовлетворяют соотношению $x_1=9x_2$?

120. Найдите целые b, при которых корни уравнения $5x^2+bx-28=0$ удовлетворяют равенству $5x_1+2x_2=1$.

121. При каких a и b квадратное уравнение $x^2+ax+b=0$ имеет своими корнями a и b?

122. Найдите все значения параметра a, при которых уравнения

$$x^2+(a^2-5a+6)x=0,\ x^2+2(a-3)x+(a^2-7a+12)=0$$

имеют одни и те же решения.

123. Определите m так, чтобы уравнения

$$x^2+x+m=0,\ x^2+mx+1=0$$

имели общий корень. Найдите этот корень.

124. При каких a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ xy=a-\frac{1}{2} \end{cases}$ имеет ровно два решения?

125. При каких a система уравнений $\begin{cases} ax-4y=a+1, \\ 2x+(a+6)y=a+3 \end{cases}$ не имеет решений?

126. При каких c система $\begin{cases} -4x-4cy=1+c, \\ (1+c)x+2y=3+c \end{cases}$ не имеет решений?

127. При каких m система уравнений $\begin{cases} (m-2)x+27y=4{,}5, \\ 2x+(m+1)y=-1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

128. При каких k система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+k), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

129. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+2=a, \\ y=x^2-4. \end{cases}$

Системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными можно решать графически. Для этого нужно начертить графики обоих уравнений и найти координаты точек их пересечения. Нам уже известны графики следующих уравнений:

а) $ax+by+c=0$ — прямая линия;

б) $xy=k$ — гипербола (рис. 34).

Выведем еще уравнение окружности с центром $A(a;\ b)$ и радиусом R. Пусть $M(x;\ y)$ — точка этой окружности (рис. 35). Тогда $AM=R$, и потому $AM^2=R^2$. Но (см. п. 18 гл. V)

$$AM^2=(x-a)^2+(y-b)^2.$$

Поэтому уравнение окружности с центром $A(a;\ b)$ и радиусом R имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$

К этому виду приводятся с помощью выделения полных квадратов уравнения вида

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$$

Пример.

Найдем графически корни системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y-20=0, \\ 2x-y=-1. \end{cases}$$

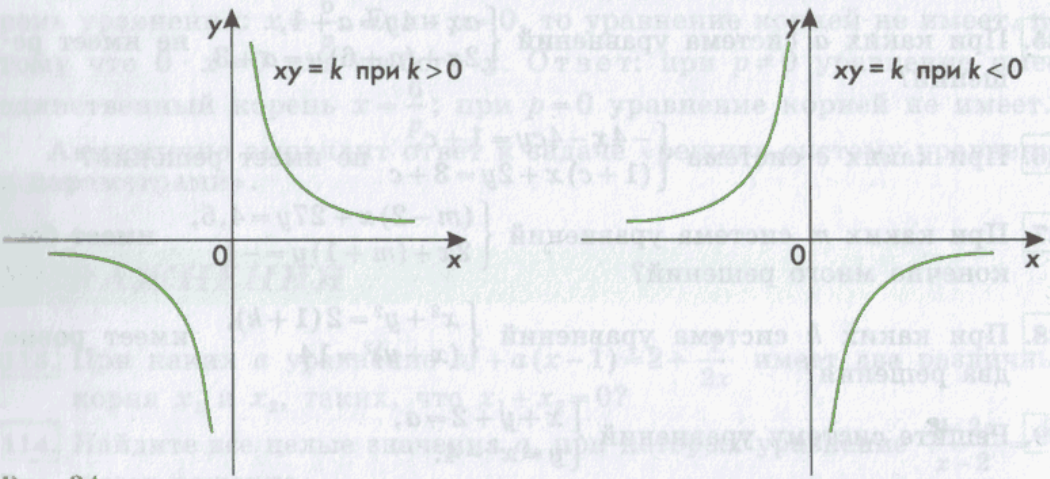


Рис. 34

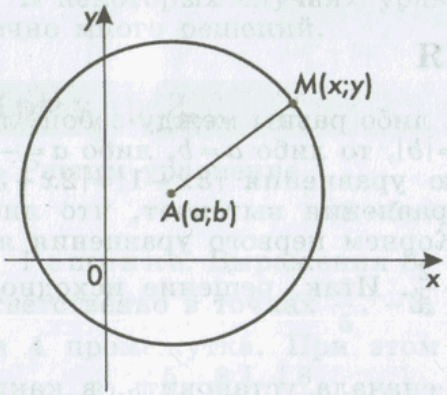


Рис. 35

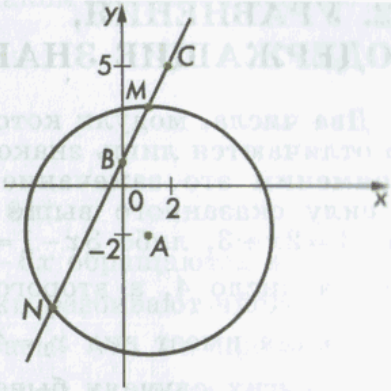


Рис. 36

Решение. Выделяя полные квадраты, получаем

$$x^2+y^2-2x+4y-20=(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)-1-4-20=$$
$$=(x-1)^2+(y+2)^2-25.$$

Значит, систему уравнений можно записать так:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=25,\\ 2x-y=-1.\end{cases}$$

Графиком первого уравнения является окружность с центром $A(1;\ -2)$ и радиусом 5. А $2x-y=-1$ — уравнение прямой, проходящей через точки $B(0;\ 1)$ и $C(2;\ 5)$. Строим окружность радиусом 5 с центром в точке A и проводим прямую через точки B и C (рис. 36). Эти линии пересекаются в двух точках $M(1;\ 3)$ и $N(-3;\ -5)$. Значит, решение системы уравнений таково: $x_1=1$, $y_1=3$ и $x_2=-3$, $y_2=-5$.

УПРАЖНЕНИЯ

130. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ x-y=5;\end{cases}$ в) $\begin{cases}y=x^2,\\ xy=8;\end{cases}$ д) $\begin{cases}x^2+y^2-6x+8y=0,\\ x^2+y^2=25.\end{cases}$

б) $\begin{cases}x^2+y^2=36,\\ y-0{,}5x=0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ xy=-12;\end{cases}$

131. Найдите графически координаты точек пересечения окружности с центром $A(-2;\ 2)$ и радиусом 5 и прямой, проходящей через точки $B(0;\ -1)$ и $C(2;\ 3)$.

132. Найдите графически координаты точек пересечения двух окружностей, имеющих соответственно центры $A(3;\ -4)$ и $B(-1;\ 6)$ и радиусы 10 и 6.

12. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК МОДУЛЯ

Два числа, модули которых равны, либо равны между собой, либо отличаются лишь знаком: если $|a|=|b|$, то либо $a=b$, либо $a=-b$. Применим это замечание к решению уравнения $|3x-1|=|2x+3|$. В силу сказанного выше из этого уравнения вытекает, что либо $3x-1=2x+3$, либо $3x-1=-(2x+3)$. Корнем первого уравнения является число 4, а второго — число $-\frac{2}{5}$. Итак, решение исходного уравнения имеет вид $x_1=4$, $x_2=-\frac{2}{5}$.

В других случаях бывает полезно сначала установить, в каких точках обращаются в нуль выражения, стоящие под знаком модуля. Эти точки разбивают числовую ось на промежутки, внутри которых выражения сохраняют постоянный знак *(промежуки знакопостоянства)*. Это позволяет освободиться на каждом из таких промежутков от знака модуля и свести задачу к решению нескольких уравнений — по одному на каждом промежутке.

Пример 1.

Решим уравнение $|x|=|3-2x|-x-1$.

Решение. Выражение x обращается в нуль при $x=0$, а выражение $3-2x$ — при $x=\frac{3}{2}$. Точки 0 и $\frac{3}{2}$ разбивают числовую ось на промежутки $(-\infty;\ 0)$, $\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$ и $\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$. При $-\infty<x<0$ имеем $x<0$ и $3-2x>0$. Поэтому на этом промежутке $|x|=-x$, $|3-2x|=3-2x$ и уравнение принимает вид $-x=3-2x-x-1$. Решая его, получаем, что $x=1$. Но это значение x не лежит на $(-\infty;\ 0)$, и потому на этом промежутке уравнение корней не имеет. При $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$ имеем $x\geqslant 0$, $3-2x\geqslant 0$, поэтому $|x|=x$, $|3-2x|=3-2x$ и уравнение принимает вид $x=3-2x-x-1$. Решая его, находим $x=\frac{1}{2}$. Так как это значение x принадлежит промежутку $\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$, то $\frac{1}{2}$ является корнем заданного уравнения. Наконец, на промежутке $\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$ имеем $x>0$, $3-2x<0$, а потому $|x|=x$, $|3-2x|=-(3-2x)$ и уравнение принимает вид $x=-(3-2x)-x-1$, т. е. $0=-4$. Значит, на этом промежутке нет корней заданного уравнения.

Мы получили, таким образом, что уравнение имеет лишь один корень, а именно $x=\frac{1}{2}$.

В некоторых случаях уравнение со знаком модуля имеет бесконечно много решений.

Пример 2.

Решим уравнение

$$|8-5x|=|3+x|+|5-6x|.$$

Решение. Выражения $8-5x$, $3+x$, $5-6x$ обращаются в нуль соответственно в точках $\frac{8}{5}$, -3, $\frac{5}{6}$. Эти точки разбивают числовую ось на 4 промежутка. При этом устанавливаем, что на промежутках $(-\infty; -3)$, $\left(\frac{5}{6}; \frac{8}{5}\right]$, $\left(\frac{8}{5}; +\infty\right)$ уравнение корней не имеет, а на промежутке $\left[-3; \frac{5}{6}\right]$ оно обращается в тождество $8-5x=3+x+5-6x$. Поэтому ответ имеет вид $\left[-3; \frac{5}{6}\right]$.

Несколько сложнее решаются уравнения, если знак модуля под знаком модуля. Однако и в этом случае метод разбиения оси на промежутки знакопостоянства позволяет решить уравнение.

Пример 3.

Решим уравнение

$$|2x-3-|x+2||=8x+12.$$

Решение. Выражение $x+2$ обращается в нуль при $x=-2$. Если $x<-2$, то $x+2<0$, и потому $|x+2|=-(x+2)$. Значит, на промежутке $(-\infty; -2)$ заданное уравнение принимает вид $|2x-3+(x+2)|=8x+12$, т. е. $|3x-1|=8x+12$. Но при $x<-2$ имеем $3x-1<0$, и потому $|3x-1|=-(3x-1)$. Получаем уравнение $-(3x-1)=8x+12$, имеющее корень $x=-1$. Так как это число не лежит на промежутке $(-\infty; -2)$, то заданное уравнение не имеет на этом промежутке корней.

Пусть теперь $x\geqslant -2$. Тогда $|x+2|=x+2$, и мы получаем уравнение $|2x-3-(x+2)|=8x+12$, т. е. $|x-5|=8x+12$. Здесь надо рассмотреть два случая: $x<5$ и $x\geqslant 5$. В первом случае $|x-5|=-(x-5)$, и потому получаем уравнение $-(x-5)=8x+12$. Его корень равен $-\frac{7}{9}$. Поскольку $-2\leqslant -\frac{7}{9}<5$, то $-\frac{7}{9}$ является корнем заданного уравнения. Если же $x\geqslant 5$, то $|x-5|=x-5$ и уравнение принимает вид $x-5=8x+12$. Корнем полученного уравнения является число $-\frac{17}{7}$. Поскольку оно не лежит на луче $[5; +\infty)$, оно не является корнем заданного уравнения. Итак, решение имеет вид $x=-\frac{7}{9}$.

УПРАЖНЕНИЯ

133. Решите уравнение:

а) $|2-3x|=|5-2x|$;
б) $|3x^2+8|=|x^2-16x+6|$;
в) $|4x^2-29x+51|=|2x^2-19x+39|$;
г) $|9-2x|=|3-3x|+|6+x|$;
д) $|3x+2|=|x-1|+2x-5$;
е) $|x+1|+|2-x|-|x+3|=4$;
ж) $||x-3|+2|=3x-5$;
з) $||2x-5|+|x|-1|=8$;
и) $x^2=|1-x^2|$.

134. Начертите график функции:

а) $y=|x|$;
б) $y=|x-4|$;
в) $y=|3x-6|$;
г) $y=|x|-2$;
д) $y=|x|+x$;
е) $y=2|x+1|-|x|$;
ж) $y=|x+4|-2x+1$;
з) $y=|x-4|+|x+4|$.

135. Решите графически уравнение:

а) $|x|=x+1$;
б) $|3x-1|=3-x$;
в) $|x|+|x-1|=1$;
г) $|7-x|=|9+x|$;
д) $|2x-4|=2|x+3|+6$;
е) $|x^2+9x|=14$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

136. Составьте приведенное квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если известно, что один из его корней равен $2+\sqrt{3}$.

137. При каких значениях a уравнение $x^2+2ax\sqrt{a^2-3}+4=0$ имеет корень кратности 2?

138. При каких значениях параметра k сумма квадратов корней уравнения $4x^2-28x+k=0$ равна 22,5?

139*. Докажите, что если a, b и c — длины сторон некоторого треугольника, то при любом значении x верно неравенство

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0.$$

140. При каких значениях a уравнение

$$(a^3-3a+2)x^2-(a^2-5a+4)x+a-a^2=0$$

имеет более двух корней?

141. Докажите, что при любых значениях x и y верно неравенство

$$(x-3y)^2+10(x-3y)+26>0.$$

142. Докажите, что если $x_0=\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, являющаяся корнем уравнения $ax^2+bx+c=0$ с целыми коэффициентами, то p — делитель c, q — делитель a.

143. Докажите, что если уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \text{ и } bx^2+cx+a=0 \ (a\neq 0)$$

имеют общий корень, то он равен 1.

144. Докажите, что если уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \text{ и } bx^2+cx+a=0 \ (a\neq 0)$$

имеют общий корень, то и уравнение $cx^2+ax+b=0$ имеет тот же корень.

145. Уравнение $x^2+px+q=0$, где $p\in Z$, $q\in Z$, имеет рациональные корни. Докажите, что эти корни — целые числа.

146. Докажите, что уравнение $x^2+(2m+1)x+2n+1=0$ не имеет рациональных корней, если $m\in Z$, $n\in Z$.

147*. Составьте кубическое уравнение, имеющее корни:

а) 0, 1, -1; б) 0, 3, $\frac{1}{3}$; в) 4, -1, $\frac{1}{4}$.

148. Определите свободный член уравнения $6x^3-7x^2-16x+m=0$, если известно, что один из его корней равен 2. Найдите остальные два корня.

149. Зная, что 2 и 3 являются корнями уравнения

$$2x^3+mx^2-13x+n=0,$$

определите m и n и найдите третий корень уравнения.

150. Составьте квадратное уравнение, сумма корней x_1 и x_2 которого равна 2 и $\frac{1-x_1}{1+x_2}+\frac{1-x_2}{1+x_1}=2a$, $a\neq 1$.

151. При каких значениях a биквадратное уравнение $x^4+ax^2+a-1=0$ имеет два различных корня?

152. Чему равна сумма всех корней любого биквадратного уравнения $x^4+px^2+q=0$, имеющего корни?

153. Составьте биквадратное уравнение, сумма квадратов корней которого равна 50, а произведение корней равно 144.

154. При двух последовательных одинаковых процентных повышениях заработная плата суммой в 40 000 р. обратилась в 90 000 р. Определите, на сколько процентов повышалась заработная плата.

155. Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов теперь ее надо снизить, чтобы получить первоначальную стоимость товара?

156. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $\frac{3}{5}$ некоторого количества денег положили в первый банк, а остальную часть — во второй банк. К концу го-

да сумма этих вкладов стала равна 540 денежным единицам, к концу следующего года — 696 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально $\frac{3}{5}$ исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равна 600 денежным единицам. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

157. Сумма площадей двух квадратов равна 313 см^2. Сторона одного квадрата на 5 единиц больше $\frac{2}{3}$ стороны другого квадрата. Вычислите сторону каждого квадрата.

158. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x+y}+x=3, \\ \dfrac{x}{2x+y}=-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x|+|y|=5, \\ xy=-6. \end{cases}$

159. Найдите все значения m, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x+(9m^2-2)y=3m, \\ x+y=1 \end{cases}$$

не имеет решений.

160. Найдите такое значение b, чтобы при любых a система уравнений

$$\begin{cases} 3x+y=a, \\ ax-y=b \end{cases}$$

имела хотя бы одно решение.

161. При каких значениях b система уравнений $\begin{cases} x+by=2, \\ 3x-2y=6 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

162. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x-2=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=\dfrac{3}{4}x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2=25-y^2, \\ x+y-7=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ (x-13)^2+y^2=144; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+y^2-10x+2y=10, \\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{10}=1. \end{cases}$

163. Решите уравнение:

а) $(3x-8)^2+5(3x-8)-150=0$;

б) $\dfrac{2x-6}{3x-4}+\dfrac{3x-4}{2x-6}=\dfrac{17}{4}$;

в) $\dfrac{x-20}{x}+\dfrac{15x}{x-20}-8=0$;

г) $64+y^4(y+7)^4=65y^2(y+7)^2$;

д) $(a+5)^4-13(a+5)^2a^2+36a^4=0$;

е) $x-6\sqrt{x}+5=0$;

ж) $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)-9=0$.

Глава VII

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

1. НЕРАВЕНСТВА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Решим задачу.

Задача.

От деревни до железнодорожной станции 20 км. Поезд отходит от станции в 11 ч. В каком часу человеку, живущему в деревне, надо выйти из дома, чтобы успеть на поезд, если он будет идти со скоростью 5 км/ч?

Решение. Если пешеход выйдет из дома в x ч утра, то до 11 ч он шел бы $11-x$ ч. За это время он прошел бы $5(11-x)$ км. Чтобы он успел на поезд, надо, чтобы это расстояние было не меньше 20 км, т. е. должно выполняться неравенство $5(11-x)\geqslant 20$. Мы еще не умеем решать такие неравенства. Но можно рассуждать так. Найдем, в котором часу человек должен выйти, чтобы в точности успеть на поезд. Для этого должно выполняться равенство $5(11-x)=20$. Решая это уравнение, получаем $11-x=4$, и потому $x=7$. Значит, выйдя из дома в 7 ч утра, пешеход успеет на поезд. Тем более он успеет на него, выйдя из дома еще раньше. А если он выйдет из дома позднее, то опоздает на поезд. Значит, чтобы успеть на поезд, надо вый-

ти из дома не позднее чем в 7 ч утра. На языке математики это значит, что решение неравенства $5(11-x)\geqslant 20$ имеет вид $x\leqslant 7$.

Многие другие задачи приводят к решению неравенств, содержащих неизвестное. *Решением неравенства*, содержащего неизвестное, называется множество всех чисел, при подстановке которых в это неравенство вместо неизвестного получается верное числовое неравенство.

Пример 1.

Докажем, что числа 9, 11, 15 входят в решение неравенства $8x-15>6x+1$, а числа 0, 1, 8 не входят в это решение. В самом деле, при подстановке чисел 9, 11, 15 вместо x получаются верные числовые неравенства:

$$8\cdot 9-15>6\cdot 9+1, \text{ т. е. } 57>55,$$
$$8\cdot 11-15>6\cdot 11+1, \text{ т. е. } 73>67,$$
$$8\cdot 15-15>6\cdot 15+1, \text{ т. е. } 105>91.$$

Если подставить в неравенство числа 0, 1, 8, то получатся неверные числовые неравенства:

$$8\cdot 0-15>6\cdot 0+1, \text{ т. е. } -15>1,$$
$$8\cdot 1-15>6\cdot 1+1, \text{ т. е. } -7>7,$$
$$8\cdot 8-15>6\cdot 8+1, \text{ т. е. } 49>49.$$

Свойства числовых неравенств, рассмотренные нами в пункте 8 главы V, позволяют при нахождении решений неравенств применять утверждения, похожие на те, которыми мы пользовались при решении уравнений:

а) Решение неравенства не изменяется, если перенести какое-нибудь слагаемое в другую часть, изменив его знак на противоположный.

б) Решение неравенства не изменяется, если умножить (или разделить) обе части этого неравенства на одно и то же положительное число; при умножении (или делении) обеих частей неравенства на отрицательное число надо поменять знак неравенства на противоположный.

Применим эти утверждения для решения неравенств первой степени с одним неизвестным, т. е. неравенств вида $A(x)<B(x)$ (или $A(x)>B(x)$), где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены первой степени.

Пример 2.

Решим неравенство $8x-15>6x+1$.

Решение. Перенеся члены, содержащие x, в левую часть, а числа в правую часть, получим $8x-6x>1+15$, т. е. $2x>16$. Значит, $x>8$. Решением неравенства является промежуток $(8;\ +\infty)$. Теперь ясно, почему числа 9, 11, 15 принадлежат решению, а числа 0, 1, 8 ему не принадлежат.

Пример 3.

Решим неравенство $4(6x+5)+1 \geqslant 3(9x-1)+9$.

Решение. Сначала приведем выражения слева и справа к стандартному виду:

$$24x+21 \geqslant 27x+6.$$

Это неравенство можно заменить неравенством

$$24x-27x \geqslant 6-21, \text{ т. е. } -3x \geqslant -15.$$

Так как число -3 отрицательное, то после деления на -3 надо изменить знак неравенства на противоположный: $x \leqslant 5$. Значит, ответ имеет вид $x \leqslant 5$, или $(-\infty; 5]$.

Пример 4.

В одном бассейне налито 100 л воды, а в другом — 150 л воды. Каждый час в первый бассейн вливается 15 л воды, а во второй — 5 л. В какие моменты времени в первом бассейне будет больше воды, чем во втором?

Решение. За x ч в первый бассейн вольется $15x$ л воды и в нем станет $100+15x$ л воды. Так же находим, что через x ч во втором бассейне будет $150+5x$ л воды. Надо найти такие значения x, для которых выполняется неравенство

$$100+15x > 150+5x,$$

т. е. решить неравенство с переменной x.

Это неравенство решается так: $15x-5x > 150-100$, т. е. $10x > 50$. Но если $10x > 50$, то $x > 5$. Итак, в первом бассейне окажется больше воды, чем во втором, при $x > 5$, т. е. после 5 ч с начала вливания воды.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решите неравенство и изобразите решение на числовой оси:

а) $12x > 18$;
б) $-6x \leqslant 1{,}5$;
в) $-11x > -33$;
г) $10 < 15x$;
д) $7x-2{,}4 \leqslant 0{,}4$;
е) $1{,}2x > 1{,}8-5x$;
ж) $17-x > 10-6x+7$;
з) $12x+0{,}5 \leqslant 13x-1$.

2. Докажите, что любое число x принадлежит решению неравенства $x+7 > x+4$.

3. Докажите, что неравенству $x+11 \leqslant x+7$ не удовлетворяет ни одно число.

4. Решите неравенство:

а) $5(x-1)+7<1-3(x+2)$;
б) $4(a+8)-7(a-1)<12$;
в) $4(b-1{,}5)-1{,}2\geqslant 6b-1$;
г) $1{,}7-3(1-m)<-(m-1{,}9)$;
д) $a(a-4)-a^2>12-6a$;
е) $(2x-1)2x-5x<4x^2-x$;
ж) $(x-1)^2-(x-7)(x-3)<2x+0{,}8$;
з) $(3x-1)^2-3x(1{,}2+3x)\geqslant 8x+177$.

5. Решите неравенство:

а) $\frac{5x-1}{4}>2$;
б) $\frac{3-2x}{2}\leqslant 1$;
в) $\frac{2+3x}{18}<0$;
г) $\frac{12-7x}{42}\geqslant 0$;
д) $\frac{7-2y}{6}>\frac{3y-7}{12}$;
е) $\frac{4{,}5-2y}{5}<\frac{2-3y}{10}$;
ж) $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3}<0$;
з) $\frac{4-y}{5}-5y>0$;
и) $x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10}<4$;
к) $\frac{(2x-1)^2}{4}-\frac{3(x-1)}{5}>x^2$;
л) $x^2-\frac{x(2x+3)}{2}<\frac{x-1}{2}$;
м) $\frac{(y-3)^2}{3}-\frac{(2y-1)^2}{12}-y>0$.

6. С помощью графика функции $y=1{,}2x-6$ решите неравенства $1{,}2x-6>0$, $1{,}2x-6<0$, $1{,}2x-6>6$, $1{,}2x-6<6$.

7. С помощью графика функции $y=3-1{,}5x$ решите неравенства $3-1{,}5x>0$, $3-1{,}5x<0$, $3-1{,}5x>-3$, $3-1{,}5x<-3$.

8. Решите неравенство:

а) $15(x+4)-5x<10x$;
б) $31(2x+1)-12x>50x$;
в) $3x+7>(x+2)+(2x+1)$;
г) $12x-1>3(4x-3)$.

9. Найдите натуральные решения неравенства:

а) $(2-1{,}2n)-(0{,}5n-6{,}5)>0$;
б) $(-27{,}1+3n)+(7{,}1+5n)<0$.

10. Найдите положительные решения неравенства:

а) $0{,}75-x<1{,}5-0{,}5x$;
б) $1{,}2(y-5)<0{,}5y+0{,}1$.

11. Найдите отрицательные решения неравенства:

а) $\frac{3}{4}x-5>\frac{5}{6}x-10$;
б) $-\frac{2}{7}x+4<\frac{3}{5}x+15$.

12. Длина стороны прямоугольника 6 см. Какой должна быть длина другой стороны, чтобы периметр прямоугольника был меньше, чем периметр квадрата со стороной 4 см?

13. Длина основания прямоугольного параллелепипеда 12 дм, ширина 5 дм. Какой должна быть высота параллелепипеда, чтобы его объем был меньше объема куба с ребром 9 дм?

14. На соревнованиях каждый стрелок делал 10 выстрелов. За каждое попадание он получал 5 очков, а за каждый промах с него снималось одно очко. Успешным считалось выступление, при котором стрелок получал не менее 30 очков. Сколько раз стрелок должен был попасть в мишень, чтобы его выступление было сочтено успешным?

15. Туристы отправились на моторной лодке по течению реки и должны были возвратиться обратно к стоянке. Скорость течения реки 2 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде 18 км/ч. На какое расстояние могут отъехать туристы, чтобы прогулка продолжалась не более 3 ч?

16. Найдите значения x, при которых имеет числовое значение выражение:

а) $\sqrt{3x-3}$; д) $\frac{1}{\sqrt{4-8x}}$; и) $\sqrt{x-2}-\frac{1}{\sqrt{9-x}}$;

б) $\sqrt{5x+2}$; е) $\frac{1}{\sqrt{6+3x}}$; к) $\frac{1}{\sqrt{2x-7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{8-3x}}$.

в) $\sqrt{\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}}$; ж) $\sqrt{\frac{2x+5}{3}}$;

г) $\sqrt{8-4x}$; з) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}$;

2. КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В п. 1 главы VI мы установили, что снаряд, пущенный вертикально вверх с начальной скоростью 392 м/с, дважды побывает на высоте 5880 м — в конце 20-й секунды и в конце 60-й секунды после выстрела. Отсюда следует, что он будет находиться на высоте, превышающей 5880 м, когда t больше чем 20 с, но меньше чем 60 с, т. е. в течение промежутка времени (20; 60).

Поскольку высота подъема снаряда в момент времени t равна $392t-4{,}9t^2$, задачу отыскания промежутка времени, в течение которого снаряд находится на высоте, большей чем 5880 м, можно записать в виде неравенства $392t-4{,}9t^2>5880$, или, что то же самое, в виде неравенства $-4{,}9t^2+392t-5880>0$. Решением этого неравенства оказался, как мы видели, промежуток (20; 60).

Определение. Неравенство, левая часть которого — многочлен второй степени, а правая часть равна нулю, называют *квадратным неравенством.*

Таким образом, квадратные неравенства имеют вид

$$ax^2+bx+c<0,\quad ax^2+bx+c>0,$$
$$ax^2+bx+c\leqslant 0,\quad ax^2+bx+c\geqslant 0.$$

Неравенства вида $ax^2+bx+c<0$ и $ax^2+bx+c>0$ называются **строгими**, а неравенства вида $ax^2+bx+c\leqslant 0$ и $ax^2+bx+c\geqslant 0$ — **нестрогими**.

Так как неравенства $ax^2+bx+c>0$ и $-ax^2-bx-c<0$ имеют одинаковые решения, то в дальнейшем будем считать, что $a>0$.

Решение квадратных неравенств зависит от знака дискриминанта. Разберем возможные случаи.

а) Пусть $D=b^2-4ac<0$. Мы знаем, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c можно записать так:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right) \qquad (1)$$

(см. п. 2 гл. VI). Так как $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ при всех значениях x неотрицательно, $a>0$ и $-\frac{D}{4a^2}>0$, то для всех x имеем

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)>0.$$

Итак, если $a>0$ и $D<0$, то неравенство $ax^2+bx+c>0$ выполняется при всех значениях x, а неравенство $ax^2+bx+c\leqslant 0$ не выполняется ни при одном значении x.

б) Пусть $D=0$. В этом случае равенство (1) принимает вид

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Это выражение при $a>0$ неотрицательно при всех значениях x и обращается в нуль лишь при $x=-\frac{b}{2a}$. Следовательно, при $D=0$ и $a>0$ неравенство $ax^2+bx+c\geqslant 0$ выполняется для всех x, неравенство $ax^2+bx+c<0$ не выполняется ни при одном значении x, неравенство $ax^2+bx+c>0$ выполняется при всех $x\neq-\frac{b}{2a}$, а неравенство $ax^2+bx+c\leqslant 0$ — только при $x=-\frac{b}{2a}$.

в) Наконец, рассмотрим случай, когда $D>0$. В этом случае, как было показано в п. 3 главы VI, имеем

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \qquad (2)$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. Положим для определенности, что $x_1<x_2$. При $x<x_1$ множитель $x-x_1$ в (2) отрицателен, а при $x>x_1$ этот множитель положителен. Множитель же $x-x_2$ отрицателен при $x<x_2$ и положителен при $x>x_2$.
Отсюда делаем вывод:

Если $D>0$ и $a>0$, то при $x<x_1$ имеем $ax^2+bx+c>0$ (один множитель в (2) положителен, а два отрицательны); *при $x_1<x<x_2$ имеем $ax^2+bx+c<0$* (два положительных и один отрицательный множитель); *при $x>x_2$ имеем $ax^2+bx+c>0$* (все множители в (2) положительны).

Значит, *при $a>0$ и $D>0$ решение неравенства $ax^2+bx+c>0$ является объединением промежутков $(-\infty;\ x_1)$ и $(x_2;\ +\infty)$, а решение неравенства $ax^2+bx+c<0$ — промежутком $(x_1;\ x_2)$.*

Предоставляем читателю записать решения неравенств

$$ax^2+bx+c\geqslant 0 \text{ и } ax^2+bx+c\leqslant 0.$$

Пример 1.

Решим неравенство:

а) $-2x^2-2x+12<0$; в) $x^2-6x+9>0$; д) $x^2+4x+5>0$.

б) $x^2+x-6<0$; г) $x^2+4x+5<0$;

Решение. а) Делим обе части неравенства на -2 и меняем знак неравенства на противоположный: $x^2+x-6>0$. Уравнение $x^2+x-6=0$ имеет два корня: $x_1=-3$ и $x_2=2$. Значит, неравенство $-2x^2-2x+12<0$ выполняется на объединении промежутков $(-\infty;\ -3)$ и $(2;\ +\infty)$.

б) Корнями уравнения $x^2+x-6=0$ являются числа $x_1=-3$ и $x_2=2$. Поэтому неравенство $x^2+x-6<0$ выполняется на промежутке $(-3;\ 2)$.

в) Уравнение $x^2-6x+9=0$ имеет единственный двукратный корень $x_1=3$, так как $D=0$. Поэтому решением неравенства $x^2-6x+9>0$ является объединение промежутков $(-\infty;\ 3)$ и $(3;\ +\infty)$.

г) Уравнение $x^2+4x+5=0$ не имеет корней, так как для него $D<0$. Неравенству $x^2+4x+5<0$ не удовлетворяет ни одно значение x.

д) Уравнение $x^2+4x+5=0$ не имеет корней. Решением неравенства $x^2+4x+5>0$ является множество всех действительных чисел.

Замечание.

При решении нестрогих неравенств надо присоединить к решению соответствующего строгого неравенства корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Пример 2.

Решим неравенство $x^2+7x-8\leqslant 0$.

Решение. Корнями уравнения $x^2+7x-8=0$ являются числа -8 и 1. Значит, неравенство $x^2+7x-8<0$ выполняется на интервале $(-8;\ 1)$. Решение неравенства $x^2+7x-8\leqslant 0$ получается присоединением к этому интервалу его концов -8 и 1. Получаем отрезок $[-8;\ 1]$.

Рассуждения, проведенные нами в пункте «в», можно наглядно представить с помощью числовой оси. Отметим на числовой оси корни x_1 и x_2. Тогда вся числовая ось разбивается на два луча $(-\infty;\ x_1)$, $(x_2;\ +\infty)$ и интервал $(x_1;\ x_2)$ (рис. 37).

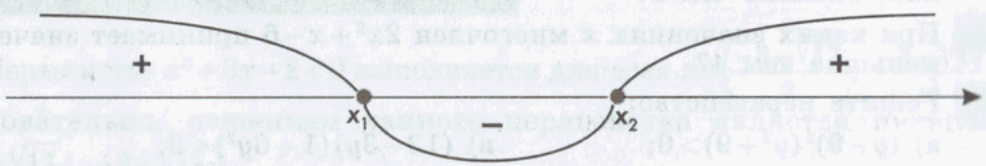


Рис. 37

Для чисел x, расположенных левее x_1, обе разности $x-x_1$ и $x-x_2$ отрицательны. Для чисел x, расположенных между x_1 и x_2, имеем $x-x_1>0$, $x-x_2<0$. Наконец, для чисел $x>x_2$ обе разности $x-x_1$ и $x-x_2$ положительны. Следовательно, произведение $(x-x_1)(x-x_2)$ на обоих лучах положительно, а на интервале отрицательно. Значит, для решения квадратного неравенства $ax^2+bx+c>0$ ($ax^2+bx+c<0$) в случае, если дискриминант $D>0$, можно пользоваться следующим правилом:

1. Найти корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.
2. Найденные корни нанести на числовую ось.
3. В каждом из полученных трех промежутков расставить знаки квадратного трехчлена
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$
4. Выбрать нужный по условию неравенства знак и записать ответ.

Описанный способ решения квадратных неравенств называют *методом интервалов*. Этот метод широко используется при решении рациональных неравенств и более детально будет рассмотрен нами в 9 классе.

УПРАЖНЕНИЯ

17. Решите неравенство:

а) $x^2-x-90<0$; д) $25x^2-10x+136>0$;
б) $6x^2-7x+2>0$; е) $49x^2-28x+4\leqslant 0$;
в) $-x^2-2x+48\leqslant 0$; ж) $-x^2-12x-160<0$;
г) $8x^2+10x-3\geqslant 0$; з) $4x^2-4x+15<0$.

18. Найдите все целые числа, удовлетворяющие неравенству:

а) $x^2-6x<0$; б) $x^2-4\geqslant 0$; в) $3x+x^2\leqslant 0$; г) $x^2-5<0$.

19. Найдите значения x, при которых имеет числовое значение выражение:

а) $\sqrt{2x-x^2}$; б) $\dfrac{24}{\sqrt{x^2+4x+3}}$; в) $\sqrt{-8x^2+x-9}$; г) $\sqrt{x^2-17x+16}$.

20. При каких значениях x многочлен $-x^2+8x+2$ принимает значения, большие чем 9? 1) $[1;\ 7]$; 2) $(-1;\ 7)$; 3) $(1;\ 7)$; 4) $(-7;\ 1)$.

21. При каких значениях x многочлен $2x^2+x-6$ принимает значения, меньшие чем 4?

22. Решите неравенство:

а) $(y-9)^2(y^2+9)>0$; в) $(12-3y)(1+6y^2)\leqslant 0$;
б) $(y^2-6y+8)(y^2+16)>0$; г) $(y-2)^2(y-3)<0$.

Для решения неравенств, в обеих частях которых имеются некоторые многочлены, можно применять утверждения *«а»* и *«б»*, приведенные в пункте 1. Если эти многочлены степени не выше второй, то, перенося все члены неравенства в левую часть и приводя подобные члены, мы получаем неравенство либо первой, либо второй степени. Так как проведенные преобразования являются тождественными (см. п. 16, гл. II), то решение полученного неравенства будет решением и исходного неравенства.

Пример 1.

Решим неравенство $x^2-2x+3>2x^2+x+1$.

Решение. Перенеся все члены в левую часть и приведя подобные члены, получим

$$x^2-2x+3-2x^2-x-1>0,\ -x^2-3x+2>0.$$

Разделим обе части последнего неравенства на -1, получим неравенство с положительным коэффициентом при x^2:

$$x^2+3x-2<0.$$

Так как дискриминант трехчлена x^2+3x-2 положителен: $D=9+4\cdot 2=17$, то корни уравнения $x^2+3x-2=0$ имеют вид:

$$x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{2},\ x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}.$$

Воспользовавшись методом интервалов, нанесем найденные корни на числовую ось и расставим знаки квадратного трехчлена x^2+3x-2 (рис. 38).

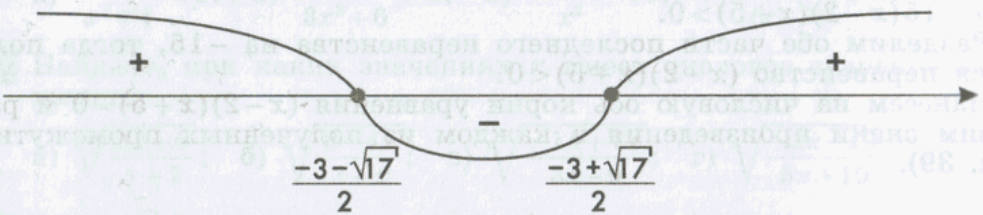


Рис. 38

Неравенство $x^2+3x-2<0$ выполняется для всех $x\in\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$, следовательно, решением данного неравенства является интервал $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

К решению квадратных неравенств сводится и решение неравенств вида $\frac{ax+b}{cx+d}>0$, которые называют **дробно-линейными неравенствами.**

В самом деле, если x_0 входит в решение данного неравенства, т. е. $\frac{ax_0+b}{cx_0+d}>0$ — верное числовое неравенство, то двучлены ax_0+b и cx_0+d имеют одинаковые знаки, и, значит, произведение $(ax_0+b)(cx_0+d)>0$.

Верно и обратное, т. е. если для x_0 выполняется неравенство

$$(ax_0+b)(cx_0+d)>0,$$

то выполняется и неравенство

$$\frac{ax_0+b}{cx_0+d}>0.$$

Эти рассуждения приводят к выводу, что решения неравенств

$$\frac{ax_0+b}{cx_0+d}>0 \text{ и } (ax_0+b)(cx_0+d)>0$$

совпадают. Следовательно, для нахождения решения неравенства $\frac{ax+b}{cx+d}>0$ достаточно решить неравенство $(ax+b)(cx+d)>0$. Раскрыв скобки в последнем неравенстве и приведя подобные члены, получим квадратное неравенство. На практике обычно не раскрывают скобки, а используют метод интервалов.

Пример 2.

Решим неравенство $\frac{6-3x}{5x+25}>0$.

Решение. Рассмотрим неравенство $(6-3x)(5x+25)>0$. Вынесем за скобки в первом множителе -3, а во втором 5, получим неравенство $-15(x-2)(x+5)>0$.

Разделим обе части последнего неравенства на -15, тогда получится неравенство $(x-2)(x+5)<0$.

Нанесем на числовую ось корни уравнения $(x-2)(x+5)=0$ и расставим знаки произведения в каждом из полученных промежутков (рис. 39).

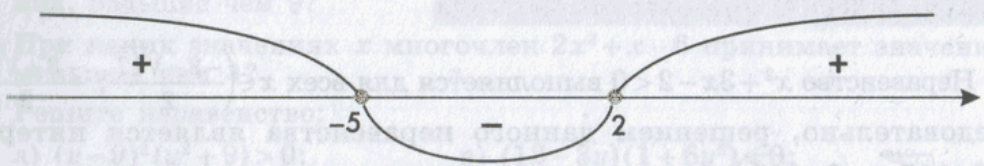


Рис. 39

Из рисунка видим, что решением неравенства $(x-2)(x+5)<0$ значит, и исходного неравенства является интервал $(-5;\ 2)$.

УПРАЖНЕНИЯ

23. Решите неравенство:

а) $\frac{12}{x-7,2}>0$; в) $\frac{1,75}{3x-0,75}<0$;

б) $\frac{-7\frac{1}{3}}{5-x}<0$; г) $\frac{-0,27}{12-5x}>0$.

24. Решите неравенство:

а) $\frac{0,5x-1}{x-5}<0$; в) $\frac{x}{10x-3}>0$; д) $\frac{10x-1}{5x-2}<0$; ж) $\frac{4x-3}{2-3x}$

б) $\frac{5y+3}{2y-7}>0$; г) $\frac{2x-1}{x+1}>0$; е) $\frac{0,6+x}{x}<0$; з) $\frac{5+7x}{4x+1}$

25. При каких значениях y значение дроби $\frac{7y}{y+1}$ больше, чем 7?

26. При каких значениях p значение дроби $\frac{5p}{p-1}$ меньше, чем 1?

27. Решите неравенство:

а) $\frac{5-x}{3-2x}\leqslant 0$; б) $\frac{3-2x}{4x-1}\geqslant 0$; в) $\frac{3y-7}{y}\leqslant 2$; г) $\frac{5y-1}{y+2}\geqslant 1$.

28. Решите неравенство:

а) $\frac{2x-7}{x^2+4}<0$; б) $\frac{x+9,5}{3x^2+6}>0$; в) $\frac{27-x}{x^2}<0$; г) $\frac{3x-8}{(x-7)^2}>0$.

29. Найдите, при каких значениях x имеет числовое значение выражение:

а) $\sqrt{\frac{3x+6}{x+7}}$; б) $\sqrt{\frac{8-4x}{3+x}}$; в) $\sqrt{\frac{-14+7x}{3x-9}}$; г) $\sqrt{\frac{-2x-10}{5x+15}}$.

30. Решите неравенство:

а) $x^2>10x-5$; г) $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}>x(x-1)+4$;

б) $2x^2+1>x$; д) $(2x+2)(x-1)<5x+5$.

в) $x-2>4-\frac{1}{3}x^2$;

31. Решите неравенство:

а) $(0{,}5x-1)(3x-4)>(3x+1)(0{,}5x-1)$;

б) $(5y-6)\left(\frac{1}{3}y+2\right)<\left(\frac{1}{3}y+2\right)(2y-1)$.

32. Решите неравенство:

а) $(z-8)(z+2)\geqslant 2z^2-6z+1$;

б) $3t^2+5t-3\geqslant(t+9)(t-4)$.

33. Решите неравенство:

а) $(2x^2+9)(x-1)(x+2)\leqslant 0$;

б) $(x^2-2x+1)(x^2+10x+25)>0$;

в) $(y^4+4y^2+4)(3y^2-7y-5)<0$.

4. СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Решим следующую задачу.

Задача.

Человек выехал в 6 ч утра на автомашине из города A в город B через город C. В городе C он должен взять пакет, который привезут на поезде, приходящем в 10 ч, и отвезти его в город B, чтобы успеть на поезд, отходящий в 17 ч. С какой скоростью он должен ехать, если расстояние от A до C равно 400 км, а от C до B — 480 км?

Решение. Так как в город C автомобилист должен приехать не ранее 10 ч (до этого времени пакет еще не привезен в C), а $10-6=4$, то скорость x км/ч должна быть такой, что $4x\leqslant 400$. С другой стороны, за $17-6=11$ ч он должен приехать в B, т. е. покрыть путь в $400+480=880$ (км). Поэтому должно выполняться неравенство $11x\geqslant 880$. Итак, надо найти значения x, для которых выполняются оба неравенства $4x\leqslant 400$ и $11x\geqslant 880$. Эту задачу записывают в виде системы неравенств

$$\begin{cases}4x\leqslant 400,\\11x\geqslant 880.\end{cases}$$

Из первого неравенства находим, что $x\leqslant 100$, а из второго — что $x\geqslant 80$. Значит, должно выполняться двойное неравенство $80\leqslant x\leqslant 100$.

Ответ: $80\leqslant x\leqslant 100$, или $x\in[80;\ 100]$. Автомобилист должен ехать со скоростью не большей, чем 100 км/ч, но и не меньшей, чем 80 км/ч.

Вообще, если даны несколько неравенств с неизвестным x, то решить систему, состоящую из этих неравенств,— значит найти все значения x, удовлетворяющие каждому из данных неравенств. Для этого решают каждое из неравенств в отдельности, изображают полученные множества на числовой оси и находят их пересечение.

Пример 1.

Решим систему неравенств $\begin{cases} 5x-30>0, \\ 4x-48\leqslant 0. \end{cases}$

Решение. Решая неравенство $5x-30>0$, получаем промежуток $(6;\ +\infty)$, а решая неравенство $4x-48\leqslant 0$ — промежуток $(-\infty;\ 12]$. Решением системы является пересечение полученных множеств: $(6;\ +\infty)\cap(-\infty;\ 12]=(6;\ 12]$.

Ответ: $(6;\ 12]$, либо, иначе, $6<x\leqslant 12$.

Пример 2.

Решим систему неравенств $\begin{cases} x^2-x-12<0, \\ x^2+x>0. \end{cases}$

Решение. Решением неравенства $x^2-x-12<0$ является промежуток $(-3;\ 4)$, а решением неравенства $x^2+x>0$ — объединение промежутков $(-\infty;\ -1)$ и $(0;\ +\infty)$. Изображаем эти множества на числовой оси.

Решением системы является объединение интервалов $(-3;\ -1)\cup(0;\ 4)$.

Ответ: $(-3;\ -1)\cup(0;\ 4)$.

УПРАЖНЕНИЯ

34. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x>17, \\ x>12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x>0, \\ x<6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x\geqslant -1, \\ x\leqslant 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x<1, \\ x<5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x<-3{,}5, \\ x>8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x>8, \\ x\leqslant 20. \end{cases}$

35. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x-12>6, \\ 3x>9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4y<-4, \\ 5-y>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-10<0, \\ 2x>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6y\geqslant 42, \\ 4y+12\leqslant 0. \end{cases}$

36. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x-0{,}8>6, \\ -5x<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2-x\leqslant 0, \\ x-4\leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 1>3x, \\ 5x-1>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 10x<2, \\ x>0{,}1. \end{cases}$

37. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5(x-2)-x>2, \\ 1-3(x-1)<-2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3(2-3x)-2(3-2x)>x, \\ 6<x^2-x(x-8); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x-(x-4)<6, \\ x>3(2x-1)+18; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 17x-5(x+0{,}6)<3x, \\ 2(3{,}5-x)+5(2x-2{,}4)>x-26; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7x+3\geqslant 5x-19, \\ 4x+1\leqslant 22-3x; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x<39+3{,}6(5x-1)-2(2x-1{,}8), \\ 6x(2{,}5x-1)-3x>x(15x+2)-1. \end{cases}$

38. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ 7{,}2 - y \geqslant 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6 - 4x > 0, \\ 3x - 1 > 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x-1}{3} > x, \\ x - 1 < 3 - \dfrac{x+1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12x - 37 > 0, \\ 6x \leqslant 42; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3 - 18x < 0, \\ 0{,}2x - 0{,}1 > 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x+1}{3} < 1, \\ 2 - \dfrac{1-x}{4} > 0. \end{cases}$

39. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2{,}5x - 0{,}5(8 - x) < x + 1{,}6, \\ 1{,}5(2x - 1) - 2x < x + 39; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}7(5x + 1) - 0{,}5(1 + x) < 3x, \\ 2x - (x - 1{,}7) > 6{,}7. \end{cases}$

40. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 15x + 50 < 0, \\ x^2 - 12x + 27 < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 15x + 50 < 0, \\ x^2 - 12x + 27 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 15x + 50 > 0, \\ x^2 - 12x + 27 < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 15x + 50 > 0, \\ x^2 - 12x + 27 > 0. \end{cases}$

41. При каких значениях x имеет числовое значение выражение:

а) $\sqrt{15 - 3x} \cdot \sqrt{x^2 + 6x - 7}$; г) $\dfrac{\sqrt{77 - 4x - x^2}}{\sqrt{6 + 5x - x^2}}$; ж) $\sqrt{-8x^2 + x - 9}$;

б) $\dfrac{\sqrt{21 + 7x}}{\sqrt{x^2 - 8x - 20}}$; д) $\dfrac{\sqrt{30 - 7x - x^2}}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3}}$; з) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 17x + 16}}$?

в) $\sqrt{2x - x^2}$; е) $\dfrac{2y}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$;

42. При каких значениях x функция $y = -x^2 + 8x + 2$ принимает значения, большие, чем 9?

43. При каких значениях x функция $y = 2x^2 + x - 6$ принимает значения, меньшие, чем 4?

1) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-2{,}5; 2)$; 3) $(-2; 2)$; 4) $[-2; 2]$.

44. Решите неравенство:

а) $(y - 9)^2(y^2 + 9) > 0$; в) $(12 - 3y)(1 + 6y^2) \leqslant 0$;

б) $(y^2 - 6y + 8)(y^2 + 16) > 0$; г) $(y - 2)^2(y - 3) < 0$.

45. При каких значениях x верно равенство:

а) $\sqrt{(x^2 - 9)^2} = x^2 - 9$; б) $\sqrt{(x^2 - 7x + 6)^2} = -x^2 + 7x - 6$?

Задача.

Цена 1 м сатиновой ленты 20 р., а цена 1 м капроновой ленты 40 р Сколько метров сатиновой ленты и сколько метров капроновой ленты можно купить, чтобы общая цена покупки была не более 200 р.?

Решение. Обозначим число метров сатиновой ленты через x, а число метров капроновой ленты через y. Тогда общая стоимость покупки равна $20x+40y$. По условию задачи должно выполняться неравенство $20x+40y\leqslant 200$. При этом числа x и y должны быть неотрицательными. Обе части данного неравенства можно разделить на 20. Таким образом, чтобы решить задачу, нужно сначала решить неравенство $x+2y\leqslant 10$, а потом отобрать из полученных решений неотрицательные.

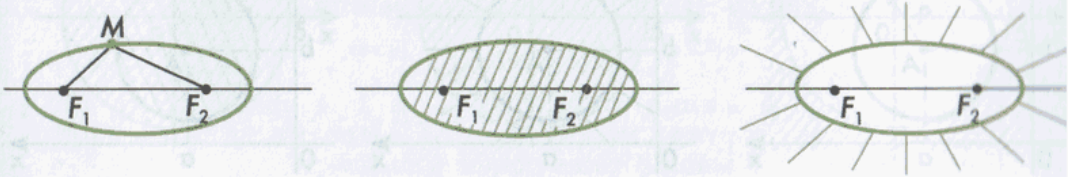
Неравенство $x+2y\leqslant 10$ имеет бесконечно много решений. Например, можно взять $x=0$, $y=0$, или $x=1$, $y=2$, или $x=5$, $y=2$ и, конечно, $x=-6$, $y=-9$. При всех этих значениях x и y выполняется неравенство $x+2y\leqslant 10$.

Итак, из неравенства с двумя неизвестными $x+2y\leqslant 10$, как и из уравнения с двумя неизвестными, нельзя найти значения этих неизвестных, поскольку они имеют бесконечное множество решений. Однако можно дать наглядное представление о множестве всех решений такого неравенства. Для этого используют изображение множеств точек плоскости, заданных характеристическими свойствами. Например, рассмотрим точки M плоскости, для которых сумма расстояний от них до двух заданных точек F_1 и F_2 равна $2a$:

$$MF_1+MF_2=2a.$$

Это множество точек называется **эллипсом**, а точки F_1 и F_2 — **фокусами эллипса** (рис. 40, *а*). Все планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце. Точки для которых $MF_1+MF_2<2a$, лежат внутри эллипса, а точки, для которых $MF_1+MF_2>2a$, лежат вне эллипса (рис. 40, *б*, *в*).

Множество точек на координатной плоскости можно задать с помощью равенства или неравенства, связывающего их координаты



а) б) в)

Рис. 40

Например, равенству $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ удовлетворяют координаты точек окружности (рис. 41, *а*) с центром в точке $A(a; b)$ и радиусом R (см. п. 11, гл. VI). Координаты точек (рис. 41, *б*, *в*), расположенных вне окружности, удовлетворяют неравенству

$$(x-a)^2+(y-b)^2>R^2,$$

а расположенных внутри окружности, — неравенству

$$(x-a)^2+(y-b)^2<R^2.$$

Видим, что график уравнения с двумя неизвестными $F(x, y)=c$ разбивает плоскость на две части. В одной из этих частей выполняется неравенство $F(x, y)>c$, а в другой — неравенство $F(x, y)<c$. Для определения знака неравенства в каждой части надо взять пробную точку и подставить ее координаты в неравенство. Если при этом получится верное неравенство, то все точки этой части входят в решение данного неравенства, в противном случае ни одна точка этой части не входит в решение неравенства.

Например, возвращаясь к задаче, изобразим на координатной плоскости решение неравенства

$$x+2y\leqslant 10.$$

Графиком уравнения

$$x+2y=10, \text{ или } y=-\frac{1}{2}x+5,$$

является прямая, которая разбивает плоскость на две части. В качестве пробной точки возьмем начало координат. Так как при подстановке координат пробной точки $O(0; 0)$ в неравенство $x+2y\leqslant 10$ получаем верное неравенство $0\leqslant 10$, то неравенство $x+2y\leqslant 10$ выполняется в той полуплоскости, в которой расположена точка $O(0; 0)$, т. е. неравенство $x+2y\leqslant 10$ выполняется для точек нижней полуплоскости, включая и точки прямой $x+2y=10$ (рис. 42).

Мы отмечали, что числа x и y должны быть неотрицательными. Но неотрицательные координаты имеют точки первой четверти. Поэтому решение задачи изображается общей частью найденного множества и первой четверти, т. е. треугольником AOB (рис. 43).

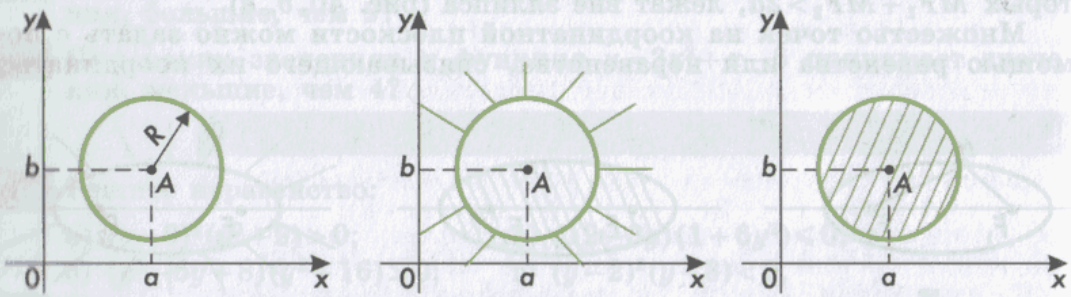


Рис. 41

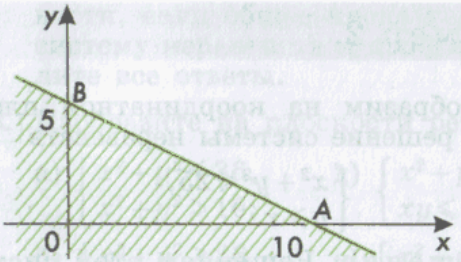


Рис. 42

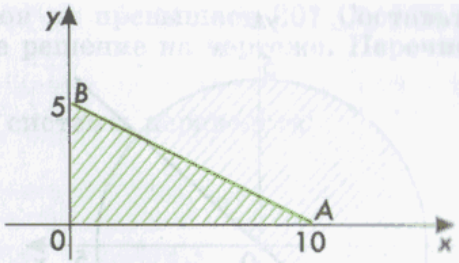


Рис. 43

Фактически на рисунке 43 изображено решение системы трех неравенств:

$$\begin{cases} x+2y \leqslant 10, \\ x>0, \\ y>0. \end{cases}$$

Пример 1.

Изобразим на координатной плоскости решение неравенства

$$x^2+y^2 \leqslant 25.$$

Решение. Уравнение $x^2+y^2=25$ задает окружность радиусом 5 с центром в начале координат. Полагая $x=0$, $y=0$, получаем верное неравенство $0^2+0^2 \leqslant 25$. Значит, точка $O(0;\ 0)$, а с ней и весь круг принадлежат решению неравенства $x^2+y^2 \leqslant 25$. Окружность $x^2+y^2=25$ также ему принадлежит.

На рисунке 44, *а* показано решение неравенства $x^2+y^2 \leqslant 25$, на рисунке 44, *б* — неравенства $x^2+y^2<25$, а на рисунке 44, *в* — неравенства $x^2+y^2>25$.

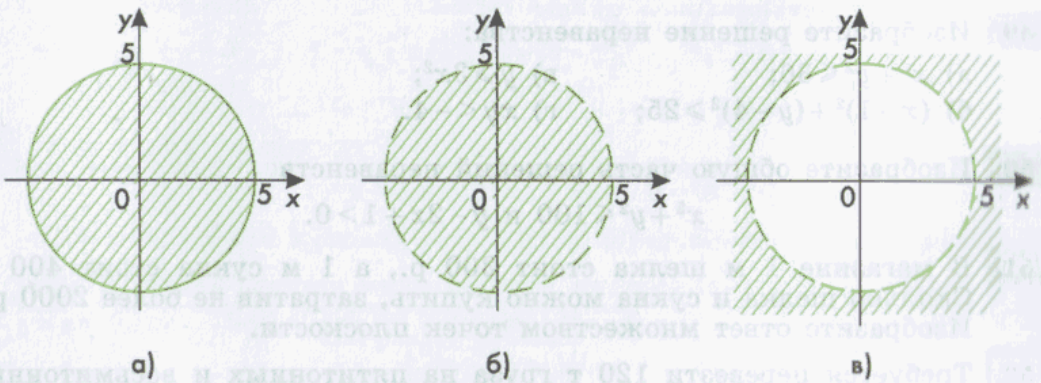


Рис. 44

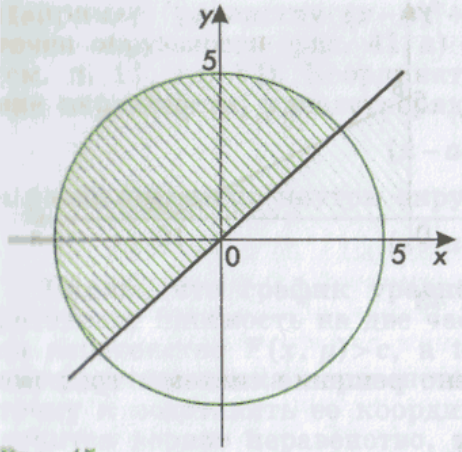


Рис. 45

Пример 2.

Изобразим на координатной плоскости решение системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 25, \\ y \geqslant x. \end{cases}$$

Решение. Решением этой системы является множество всех точек круга радиусом 5 с центром в начале координат, которые лежат выше прямой $y=x$ или на этой прямой (рис. 45).

УПРАЖНЕНИЯ

46. Какие из точек $A(1;\,0)$, $B(-3;\,1)$, $C(0;\,3)$, $D(8;\,4)$ лежат в полуплоскости $4x-2y+6 \geqslant 0$?

47. Каким из указанных ниже полуплоскостей принадлежит точка $A(5;\,2)$:

а) $3x-4y+1<0$;
б) $7x+y-16 \geqslant 0$;
в) $-4x+5y-11>0$;
г) $15x-12y+71 \leqslant 0$?

48. Принадлежит ли точка $A(1;\,-6)$ решению системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-4y+1>0, \\ 2x+5y+7>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-6y+1>0, \\ x+3y+8<0? \end{cases}$

49. Изобразите решение неравенства:

а) $x^2+y^2 \leqslant 36$; в) $y \geqslant 3x^2$;
б) $(x-1)^2+(y-4)^2 \geqslant 25$; г) $xy<-4$.

50. Изобразите общую часть решений неравенств

$$x^2+y^2 \leqslant 100 \text{ и } y-2x+1>0.$$

51. В магазине 1 м шелка стоит 300 р., а 1 м сукна стоит 400 р. Сколько шелка и сукна можно купить, затратив не более 2000 р.? Изобразите ответ множеством точек плоскости.

52. Требуется перевезти 120 т груза на пятитонных и восьмитонных грузовиках. Сколько нужно грузовиков той и другой грузоподъем-

ности, если общее число грузовиков не превышает 20? Составьте систему неравенств и изобразите ее решение на чертеже. Перечислите все ответы.

3. Изобразите на плоскости решение системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 36, \\ x^2+y^2 \geqslant 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 36, \\ x^2+y^2 \geqslant 16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 36, \\ x^2+y^2 \leqslant 16; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 36, \\ x^2+y^2 \leqslant 16; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 25, \\ xy \leqslant 4; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 36, \\ x^2+y^2-2x-4y=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x-2y+5=0, \\ 2x+y-4 \geqslant 0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} xy \geqslant 4, \\ x^2+y^2 \leqslant 25. \end{cases}$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Разложите на множители:

а) $x^4+x^2y^2+y^4$;
б) a^4+a^2+1;
в) $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz$;
г) $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz$;
д) $x^4-x^2(a^2+1)+a^2$.

2. Докажите, что если к произведению трех последовательных натуральных чисел прибавить среднее из них, то полученная сумма будет равна кубу среднего числа.

3. Докажите, что при всяком натуральном x числовое значение выражения $(x^2+3x+1)^2-1$ делится на 24.

4. Докажите, что если $a+b+c=0$, то

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

5. Докажите, что если

$$a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=1,$$

то $abc=0$.

6. Докажите, что если $a+b=0$, то $a^{99}+b^{99}=0$.

7. Решите уравнение:

а) $(k-3)x=4$; в) $(2k^2+3)x=2c+1$;
б) $(k+1)x=0$; г) $(2k+1)x=3m^2+4$.

8. Для каких значений параметров k и m не имеет решения уравнение:

а) $(2k-7)y=1-3m$; в) $(k^2+5)x=m-3$;
б) $(3k+4)x=m^2+1$; г) $(k-1)x=k^2-4$?

9. Для каких значений параметров b и p уравнение имеет решением любое действительное число:

а) $(2b-1)x=5-3p$; в) $(b^2+1)x=p+2$;
б) $\left(-6-\frac{2}{9}b\right)z=z+5p$; г) $\frac{b+4}{2}y=p^2+5$?

10. Существуют ли значения параметров m, k и p, такие, что каждое из уравнений:

а) $(m^2+k^2)y=p-1$; б) $(k-m)z=(k-m)p$

имеет один и только один корень; один корень, равный нулю; не имеет решений?

11. Решите уравнение:

а) $6(2x+3)=0$; б) $(x+3)(2x-5)=0$; в) $(x+3)(2x-5)(x^2+1)=0$.

12. Решите уравнение:

а) $|3x|=6$; б) $|2x-3|=7$; в) $a|a-x|=2$; г) $|2|x|-1|=3$.

13. В двузначном числе цифра единиц на 3 больше цифры десятков, разность же квадратов обеих цифр равна 39. Найдите это число.

14. Сумма цифр двузначного числа равна 9. Если из квадрата этого числа вычесть квадрат обращенного числа (т. е. числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке), то останется 891. Найдите это число.

15. (Старинная китайская задача.) В центре квадратного пруда, имеющего 10 футов в длину и ширину, растет тростник, возвышающийся на 1 фут над поверхностью воды. Если его притянуть к берегу, к середине стороны пруда, то он достигнет своей верхушкой берега. Какова глубина пруда?

16. Одному человеку a лет, другому b лет. Через сколько лет отношение их возрастов будет равно k $\left(a=50,\ b=30,\ k=1\frac{1}{2}\right.$ или $\left.a=32,\ b=44,\ k=\frac{3}{4}\right)$?

17. Из города выехал автомобиль, движущийся со скоростью a м/мин. Спустя t мин вдогонку ему выехал второй автомобиль, проезжающий b м/мин. Через сколько минут после своего выезда второй автомобиль догонит первый?

18. Не решая следующих систем, определите, имеет ли каждая из них единственное решение, бесконечное множество решений или совсем не имеет решений:

а) $\begin{cases}2x-5y=3,\\4x+10y=6;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x+2y=5,\\2x+3y=8;\end{cases}$

б) $\begin{cases}6x+8y=10,\\3x+4y=5;\end{cases}$ д) $\begin{cases}x-y-3=0,\\-x+y+3=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}9x-6y=3,\\3x-2y=2;\end{cases}$ е) $\begin{cases}x-0{,}1y+2=0,\\10x-y+3=0.\end{cases}$

19. При каких значениях a и b прямые

$$3x-y+b=0 \text{ и } ax-2y-10=0:$$

а) пересекаются в точке $(2;\ -1)$; б) параллельны; в) сливаются в одну прямую?

20. При каких значениях m система уравнений

$$\begin{cases}2x-5y=10,\\3x-2y=m\end{cases}$$

имеет решение? При каких значениях m это решение лежит в области:

а) $x>0,\ y>0$; в) $x>0,\ y<0$;

б) $x<0,\ y<0$; г) $x<0,\ y>0$?

21. Определите, при каких значениях a и b следующие системы уравнений имеют бесконечное множество решений; не имеют решений:

а) $\begin{cases}5x+(a-1)y=3b,\\ x-2y=3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+48y=b,\\ \dfrac{x}{a-1}+(a-3)y=a+1.\end{cases}$

22. Исследуйте следующие системы относительно параметра m:

а) $\begin{cases}(m+3)x-2y=5,\\ (m+1)x+y=7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(m-5)x-2y=m-7,\\ (m+1)x+my=3m.\end{cases}$

23. Один покупатель купил a м сукна и b м шелка и за всю покупку заплатил d р.; другой покупатель по той же цене купил m м сукна и n м шелка и заплатил также d р. Сколько стоит метр сукна и метр шелка отдельно?

24. На участке в c км поезд шел x ч со скоростью 50 км/ч и y ч со скоростью 60 км/ч. Известно, что если бы поезд шел x ч со скоростью 60 км/ч и y ч со скоростью 50 км/ч, то он прошел бы путь в 210 км. Найдите x и y. При каких значениях c задача имеет решение?

25. (Старинная задача о двух пастухах.) Один пастух говорит другому: «Дай мне одну из твоих овец, и у меня будет вдвое больше овец, чем у тебя». А второй отвечает ему: «Нет, лучше ты дай мне одну из своих овец, тогда у нас будет поровну». Сколько овец было у каждого пастуха?

26. Поезд шел 12 ч сначала со скоростью 50 км/ч, потом со скоростью 40 км/ч и прошел за все время 550 км. Сколько часов шел он с первой скоростью и сколько со второй?

27. Постройте график функции, если известно, что:

а) $y=kx-5$ и графику принадлежит точка $A(3;\ 7)$;

б) $y=-3x+b$ и графику принадлежит точка $B(2;\ -12)$.

28. Постройте на одном чертеже графики функций:

а) $y=3x,\ y=3x+2,\ y=3x-3,\ y=3x+0{,}5$;

б) $y=-x,\ y=-x-1,\ y=-x+2,\ y=-x+3{,}5$.

Каково взаимное расположение графиков соответствующих функций в каждом случае?

29. Используя вывод из предыдущей задачи, найдите параметр k, если известно, что графики функций параллельны:

а) $y=2x+4,\ y=kx-1{,}5$; б) $y=-kx-1,\ y=\dfrac{3}{4}x+5$.

30. Задайте линейную функцию, если известно, что ее график параллелен графику функции $y=-0{,}2x+7$ и проходит через точку пересечения графиков функций $y=x-2$ и $y=-3x+18$.

31. Найдите параметр m, если известно, что через одну и ту же точку с абсциссой $x=1$ проходят графики функций:

а) $y=-4x+m$ и $y=2x-3$;

б) $y=2x-m$ и $y=-x+\frac{2}{3}$.

32. Постройте график функции:

а) $y=\begin{cases} 1 & \text{при } x<-1, \\ -2x+1 & \text{при } -1\leqslant x\leqslant 0, \\ -1 & \text{при } x>0; \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} -2x & \text{при } x<-1, \\ 2 & \text{при } -1\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x & \text{при } x>1. \end{cases}$

33. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c справедливо неравенство:

а) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$;

б) $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\geqslant abc(a+b+c)$.

34. Преобразуйте выражение:

а) $\sqrt{15+\sqrt{29}}$;

б) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$;

в) $\sqrt{16+\sqrt{156}}$;

г) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$;

д) $\sqrt{a+2b+\sqrt{8ab}}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

35. Докажите равенство $\dfrac{\sqrt{9}+\sqrt{54}+\sqrt{450}+\sqrt{75}}{5+\sqrt{3}}=3\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

36. После двух последовательных повышений зарплата достигла $\frac{15}{8}$ по сравнению с первоначальной. На сколько процентов повысилась зарплата в первый раз, если второе повышение было вдвое больше (в процентном отношении) первого?

37. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2xy-3\dfrac{x}{y}=15, \\ xy+\dfrac{x}{y}=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x^2+y^2-2xy=7, \\ (2x-y)y=y. \end{cases}$

38. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2+y^2+x+7y=50; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2+8x-6y+34=0, \\ x+y=1. \end{cases}$

39. Решите уравнение:

а) $\frac{(x+3)^4}{x^4}-\frac{61(x+3)^2}{x^2}+900=0$;

б) $\frac{y^2-5y+15}{y}+\frac{33y}{y^2-5y+15}-14=0$;

в) $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-7)=3$;

г) $(x^2-8)^2+4(x^2-8)-5=0$.

40. Решите уравнение с параметрами:

а) $\frac{x-1}{p-2}+2x=\frac{3}{2+p}+\frac{p^2}{4-p^2}$;

б) $\frac{px}{p-1}-\frac{px-1}{p^2-1}=2-\frac{p}{1+p}$;

в) $\frac{2x}{x-2p}+\frac{(p+1)x}{x^2-px-2p^2}-\frac{1}{x+p}=2$;

г) $\frac{x}{a+x}+\frac{a+x}{a-x}=\frac{x-a-4a^2}{a^2-x^2}$;

д) $\frac{mx-n}{(m-2)n(x-1)}=\frac{2}{n(m-2)}+\frac{2+3x}{(m-2)(x-1)}$;

е) $6(x-a)^2-13x(x-a)+6x^2=0$;

ж) $\frac{ax^2}{x-1}-2a=a^2+1$;

з) $\frac{ax+1}{x(x+a)}=1$.

41. Вычислите:

а) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}-\frac{6}{\sqrt{3}-3}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}+5}$;

1) $-\frac{3\sqrt{3}+7}{11}$; 2) -2; 3) 1; 4) 2;

б) $\left(\frac{3}{\sqrt{21}-\sqrt{18}}+\frac{3}{\sqrt{15}-\sqrt{18}}-\sqrt{21}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}$;

1) $-\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{18}$; 3) -1; 4) $\sqrt{21}$;

в) $\left(\frac{2\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+\sqrt{11}}+\frac{2\sqrt{17}+2}{\sqrt{11}-\sqrt{17}}+(\sqrt{11}+\sqrt{17})\right)\cdot\frac{1}{2-\sqrt{17}}$;

1) $\frac{2}{3}\sqrt{11}$; 2) $-\frac{2}{3}\sqrt{11}$; 3) $\sqrt{11}$; 4) $2\sqrt{11}$;

г) $\sqrt{25\cdot 49}-\sqrt{169\cdot 0{,}04}+\sqrt{196\cdot 0{,}09}$;

1) 36; 2) 36,9; 3) 36,6; 4) 38;

д) $2{,}8^3-3\cdot 2{,}8^2\cdot 11{,}8+3\cdot 2{,}8\cdot 11{,}8^2-11{,}8^3$;

1) -243; 2) 243; 3) 245; 4) -241.

42. Выполните действия и укажите правильный ответ:

а) $\left(\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2}+1\right)+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{x}\right)$;

1) 1; 2) $\dfrac{2x+y}{x+y}$; 3) $\dfrac{2x-y}{x+y}$; 4) $\dfrac{2x}{x+y}$;

б) $\left(\dfrac{49}{b^3+27}-\dfrac{b+3}{b^2+9-3b}\right)\cdot\dfrac{b(b^3+27)}{16-b^2}+\dfrac{4-9b-b^2}{b+4}$;

1) $b+3$; 2) $\dfrac{b}{b+3}$; 3) 1; 4) $\dfrac{b+3}{b-2}$;

в) $\dfrac{25x^2-4y^2}{15xy}:\dfrac{25x^2+20xy+4y^2}{9y}-\dfrac{(3x-2y)^2}{(3x^2-2xy)(5x+2y)}$;

1) $\dfrac{4y}{5x(5x+2y)}$; 2) $\dfrac{y}{5x+2y}$; 3) $\dfrac{4y}{x(5x+2y)}$; 4) $\dfrac{y}{x}$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt{2}a^3b^4}{-3x^5y^5}\right)^4:\left(\dfrac{2a^4b^2}{3x^6y^8}\right)^3-\left(\dfrac{2b^2}{\sqrt{3}x^2y^6}\right)^2\cdot\left(-\dfrac{xy^4}{2b}\right)^3$;

1) $\dfrac{b^{10}y^4}{6x^2}$; 2) $\dfrac{b^3y^2}{6}$; 3) $\dfrac{b^{10}y^4+bx}{6x^2}$; 4) $\dfrac{b^{10}y^4+b^3x^3}{6x^2}$;

43. Упростите: а) $\dfrac{5x-\sqrt{a}}{x\sqrt{a}-5\sqrt{a}+bx-5b}+\dfrac{\sqrt{36y}+24}{\sqrt{ay}+4\sqrt{a}+b\sqrt{y}+4b}$;

1) $\dfrac{11x-\sqrt{a}-30}{(\sqrt{a}+b)(x-5)}$; 2) $\dfrac{11x-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+b)(x-5)}$; 3) $\dfrac{11x-30}{(x-5)}$; 4) $-\dfrac{\sqrt{a}+30}{\sqrt{a}+b}$;

б) $\dfrac{\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+2)^2}}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}}$;

1) $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)(\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a})$;
3) $\dfrac{3}{2}(\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a})$;
2) $-\left(a+\dfrac{1}{2}\right)(\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a})$;
4) $-\dfrac{3}{2}(\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a})$;

в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{0{,}09b^4}-\sqrt{0{,}36b^2c^2}+0{,}1\sqrt{9c^4}}}{b-c}$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $b<c$;

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}(b-c)$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{3}(b-c)$;

г) $\dfrac{x-8\sqrt{x}+15}{x-49}\cdot\dfrac{x-2\sqrt{x}-35}{x-25}$;

1) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+7}$; 2) $\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+7}$; 3) $\dfrac{\sqrt{x}+3}{x-5}$; 4) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x+5}$;

д) $\dfrac{x+2\sqrt{y}}{x^3+6x^2y+12xy+8y\sqrt{y}}\cdot\dfrac{x^2+4x\sqrt{y}+4y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

1) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$; 2) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$; 3) $\dfrac{x+2\sqrt{y}}{x-2\sqrt{y}}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

е) $\left(\dfrac{a^2-b^2}{8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3}+\dfrac{a+b}{4a^2-4ab+b^2}\right)\cdot\dfrac{9a^2+6ab+2b^2}{27a^3-8b^3}$;

1) $\dfrac{a+b}{2a-b}$; 2) $\dfrac{a-b}{2a-b}$; 3) $\dfrac{a+b}{(2a-b)^3}$; 4) $\dfrac{a^2-b^2}{(2a-b)^3}$;

ж) $\left(\dfrac{9}{x^2+3x+9}+\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{x^3+15x^2}{x^3-27}\right)\left(x-3+\dfrac{9x}{x-3}\right):(x-3)$;

1) $\dfrac{1}{x-3}$; 2) $\dfrac{x^2}{x-3}$; 3) $\dfrac{2x}{x^3-27}$; 4) 1.

44. Найдите все целые неотрицательные решения уравнения:

а) $3x-8y=5$;

1) $x=15,\ y=5$;
2) $x=15t,\ t>0$;
3) $x=15+8t,\ y=5+3t,\ t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$;
4) $x=15-8t,\ y=5-3t,\ t\geqslant 0$;

б) $4x+12y=32$;

1) $x=2,\ y=2$;
2) $x=2+3t,\ y=2-t,\ t\geqslant 0$;
3) $x=2-3t,\ y=2+t,\ t\geqslant 0$;
4) $x=2+3t,\ y=2-t,\ t=0,\ 1,\ 2$;

в) $7x-5y=8$;

1) $x=4,\ y=4$;
2) $x=4t,\ y=4t,\ t\geqslant 0$;
3) $x=4+5t,\ y=4+7t,\ t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$;
4) $x=4-5t,\ y=4-7t,\ t\geqslant 0$.

45. Упростите:

а) $(a^2y^2-abxy+b^2x^2)(bx+ay)$;

б) $(ax-y(x+y))(a^2x^2+axy(x+y)+y^2(x+y)^2)$;

в) $(a^2x^2+abx(x-a)+b^2(x-a)^2)(x(a-b)+ab)$;

г) $(a^2(x+y)^2-ab(x^2-y^2)+b^2(x-y)^2)(x(a+b)+y(a-b))$.

46. Обратите в обыкновенную дробь:

а) $0,(3)$;

1) $\dfrac{3}{10}$; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{1}{30}$; 4) $\dfrac{1}{33}$.

б) 0,32; 1) $\frac{32}{100}$; 2) $\frac{8}{25}$; 3) $\frac{32}{99}$; 4) $\frac{32}{999}$;

в) 0,3(24); 1) $\frac{324}{999}$; 2) $\frac{324}{1000}$; 3) $\frac{321}{999}$; 4) $\frac{107}{330}$;

г) 3,5(176); 1) $3\frac{5176}{10000}$; 2) $3\frac{5176}{9999}$; 3) $3\frac{5176}{9990}$; 4) $3\frac{5176}{9900}$.

47. Даны множества: $A=[-3;\ 7]$; $B=[-4;\ 10]$; $C=[-1;\ 8]$. Найдите множества: а) $A\cap B\cap C$; б) $A\cup B\cup C$; в) $(A\cap B)\cup C$; г) $(A\cup B)\cap C$.

48. Докажите справедливость неравенства при всех значениях переменных:

а) $(3x-2)(3x+2)<9x^2$;
б) $(5x-7)(5x+7)\geqslant -49$;
в) $9a^2-6a+2>0$;
г) $(5m-10)(m-2)>15$;
д) $3x(x+6)<(3x+6)(x+4)$;
е) $x-6\sqrt{x}+10\geqslant 1$.

49. Сравните два числа:

а) $\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ и $\frac{6}{3-\sqrt{3}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

50. Освободитесь от внешнего радикала:

а) $\sqrt{5-\sqrt{24}}$; 1) $\sqrt{5}-2\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3-\sqrt{8}}$; 1) $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2}-1$; 4) $1-\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{n-6\sqrt{n-9}}$, $n\geqslant 9$;

1) $\sqrt{n}-6\sqrt{n-9}$; 2) $\sqrt{n-9}-3$; 3) $3-\sqrt{n-9}$; 4) $\sqrt{n}-\sqrt{6(n-9)}$.

51. Исследуйте, при каких значениях параметра a уравнение имеет два различных корня:

а) $x^2-2ax+a^2=0$;

1) $a>0$; 2) $a<0$; 3) a — любое; 4) ни при каком значении a;

б) $x(x+3)+a(a-3)=2(ax-1)$;

1) a — любое число; 2) $a\geqslant 0$; 3) $a<0$; 4) $a\neq 0$;

в) $\frac{1}{x-a}+\frac{a}{x-1}=2$;

1) $a>3$; 2) $a<3$; 3) $a\neq 3$; 4) $a=3$;

г) $(a-3)^2x^2+2(a-3)x+1=0$;

1) $a\neq 3$; 2) $a>3$; 3) $a<3$; 4) ни при каком значении a.

Глава I

1. а) -5; б) $0{,}2$; в) $-0{,}2$; г) $-\frac{1}{15}$. **13.** а) $-0{,}9$; б) $\frac{2}{3}$; в) -7; г) $\frac{52}{17}$.
6. а) $x=8$; б) $p=22$; в) $y=-9$; г) $q=6$. **17.** а) При всех x, кроме $x=2$ ($x\neq 2$);
) $x\neq -6$; в) $x\neq -4$; г) $y\neq -\frac{4}{7}$; д) $y\neq 0$ и $y\neq \frac{1}{4}$; е) $y\neq 3$ и $y\neq -\frac{9}{10}$; ж) при всех y;
) $y\neq 0$. **19.** а) $x=y$; б) $a=-b$; в) $a=b$ или $a=-b$; г) $a=0$ или $b=0$; д) $a=0$ или
$=2$; е) $a=4$ или $b=6$. **23.** а) Нет; б) да. **24.** а) 0; б) 1; в) 12; г) -4; 7; д) 3; е) нуевого значения дробь не имеет. **26.** а) $x=8$; в) $x=3$; д) нет решений; ж) $x=4$
или $x=-4$. **29.** а) a; ax; a^2x; в) a; ab; ac. **30.** а) a^2b^2xy; a^2bxy; a^2bx^2y; $abcxy$;
) x^4; x^5; x^6; ax^7. **31.** а) x^3; в) $x^3y^2z^3$. **32.** а) x^4; б) $a^2b^3x^2y^4$; в) $a^6x^4y^3z^2$. **33.** а) ab^2c.
4. а) $a^6b^7c^3d$. **35.** а) Ложно; б) ложно. **38.** а), г) $\frac{a}{10x}$; б), в) $\frac{-a}{10x}$. **41.** а) $-\frac{5}{8}$;
) $-\frac{2}{3}$; ж) $-\frac{y}{3}$. **42.** а) $\frac{2a}{3b}$; в) $\frac{3x}{4y}$. **43.** а) $\frac{a+4b}{2ab}$; в) $\frac{x}{3x-2y}$; д) $\frac{2}{3}$; ж) $\frac{1}{c}$. **44.** а) $\frac{10a}{6b}$;
) $\frac{5ac}{3bc}$. **45.** а) $\frac{5}{2x^5}$; г) $\frac{5a^3}{6bx}$. **46.** а) 25; г) $\frac{64}{27}$; ж) $\frac{1}{8^6}=\frac{1}{262\,144}$. **47.** а) $\frac{1}{2}$;
) 3. **48.** а) $\frac{3}{4x^2}$; г) $\frac{2a}{3b}$; ж) $\frac{-9ax^6}{2y^2}$. **49.** а) c^{11}; в) c^{23}; д) $\frac{1}{c^3}$. **50.** а) $\frac{1}{c^{10}}$. **51.** а) $\frac{1}{5}$;
) 27. **52.** а) $\frac{b^3}{ac^4}$; в) $\frac{a^5}{2^{11}b^8x^3}$; д) $\frac{b^2}{a^7}$; ж) $\frac{5y^2}{3b^5x}$. **53.** а) $\frac{4}{3}x^2$; в) $5x^5y$.
4. а) $\frac{\frac{85}{6}a^2b^2x^2y^2}{5a^2b^2y^4}$; в) $\frac{\frac{8}{3}a^2b^2ct^7x^7}{4a^2c^3t^5x^{10}}$. **55.** а) $\frac{1}{7^6}$; г) $\frac{1}{(7x+y)^8}$; ж) $4y^2$; к) $\frac{3}{4(2a-9b)^4}$.
6. а) $\frac{x}{3}$; г) $\frac{2b}{7a}$; ж) $\frac{cx}{dy}$. **57.** а) $\frac{ax}{b}$; в) 2; д) $\frac{a}{b}$. **58.** а) $\frac{6ab}{35xy}$; г) $\frac{(2x+y)(x-y)}{15abcd}$;
к) $\frac{c}{2}$. **59.** а) $\frac{3x}{2y}$; в) $\frac{p}{3q}$. **60.** а) ab; в) $\frac{b}{4}$. **61.** а) $\frac{19ay}{10bx}$; г) $\frac{10(x+4y)cd}{3ab(x-2y)}$;
к) $\frac{(a+b)x}{a(x+y)}$. **62.** а) $\frac{2}{x^7}$; в) $\frac{5x^{10}}{9a^{12}}$. **63.** а) $\frac{4}{9cd}$; г) $\frac{n}{4}$; ж) $-6a^3b$. **64.** а) $\frac{b}{3}$; г) $\frac{-3acd^3}{b}$;
к) $\frac{7mp^3q}{4a^3b^3c^2xy}$. **65.** а) $\frac{a+b}{5}$; г) $\frac{n}{12}$; ж) $\frac{3a}{7}$. **66.** а) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2b+c-5}{b}$; ж) $\frac{2x-3}{a+b}$;
) a. **68.** а) $x=2$. **69.** а) $\frac{x-5}{y-1}$; г) $\frac{5p}{p-q}$; ж) $\frac{6}{7-y}$. **70.** а) $\frac{3p-5}{p-2}$; в) 1. **71.** а) $-\frac{8}{3}$.
2. а) 3. **73.** а) $\frac{3a+2b}{6}$; г) $\frac{2c-7d}{42}$; ж) $\frac{13}{6a}$; к) $\frac{67y}{60}$; н) $\frac{8}{45a}$. **74.** а) $\frac{12m-5}{28mn}$; г) $\frac{3}{10x}$.
5. а) $\frac{3ay+2bx}{by}$; г) $\frac{25acx-18bdy}{abcd}$. **76.** а) $\frac{x-5y}{1}$; в) $\frac{ax-5ay}{a}$. **77.** а) $\frac{ax+1}{a}$; г) $\frac{28y}{4x-7y}$.
8. а) $x=14$; г) $x=-3$. **79.** а) $\frac{2}{1-x^2}$; в) $\frac{2aq}{p^2-q^2}$. **80.** а) $\frac{19}{6(x-y)}$; г) $\frac{b}{10(b+3)}$.

81. а) $\frac{2x^5}{x^8}$ и $\frac{3}{x^8}$; в) $\frac{28}{56a^5}$ и $\frac{10a^3}{56a^5}$. **82.** а) $\frac{a^5b-1}{a^7}$; в) $\frac{aby^6-cd}{y^{12}}$. **83.** а) $\frac{c^3}{c^5}$ и $\frac{1}{c^5}$; в) $\frac{3{,}2(a+b)^5}{(a+b)^8}$ и $\frac{4{,}5}{(a+b)^8}$. **84.** а) $\frac{3+2a^3}{a^5}$; в) $\frac{4{,}8-2{,}5(x+y)^3}{(x+y)^6}$. **85.** а) $\frac{70a^5x^5-54b^7y^7}{45a^3b^4x^2y^8}$; в) $\frac{77a^2b^3cy+25ab^4c^3xz}{140x^2y^4z^3}$. **86.** а) $\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^5}$; в) $\frac{x^2}{6}+\frac{7}{6x^2}+\frac{4}{3x^3}-\frac{5}{6x^4}$. **87.** а) $\frac{x^9}{8y^3}$; г) $\frac{m^2}{49n^2}$; ж) $\frac{64m^{30}}{p^{24}q^{18}}$. **88.** а) $\left(\frac{2ab^3}{x^5}\right)^2$; в) $\left(\frac{-2a^2}{a-b}\right)^3$. **89.** а) $\frac{c}{8}$; в) $2a$; д) $\frac{9(a+2b)^8}{4(x-3y)^{10}}$. **90.** а) $\frac{379}{x^6}$; в) $\frac{b^4x^2-a^2y^2}{x^6y^6}$. **91.** а) $27x^3y^9$; д) $\frac{1}{25}m^{12}n^8$; ж) $\frac{1}{2}a^5b^{14}$. **92.** а) $(3ab)^3$; в) $(2a^3x^5)^3$; д) $(18a^9x^9)^3$. **93.** а) $-\frac{96}{7}ay$; в) $\frac{-243ay^8}{4c^4x^3}$. **94.** а) $\frac{24500a^{13}x^{12}-17496b^{17}y^{18}}{10125a^9b^8x^6y^6}$; в) $\frac{65219a^6b^9c^3+12500a^2b^8c^6x^4yz^5}{392000x^6y^9z^9}$. **95.** а) $\frac{4a^3y^{10}}{243c^2x}$; б) $-\frac{24a^2}{5^7y^{10}}$. **96.** 7 ч 20 мин. **97.** $\frac{9}{2}$ м^3. **98.** $2\frac{1}{3}$ суток. **99.** 21 ч. **103.** Прямо пропорциональны: а, б, д, е, ж, з. **104.** Прямо пропорциональны x, a и x, p. **105.** в) Точку B (3; 2), симметричную точке A относительно биссектрисы I координатного угла; г) $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$; е) нет; ж) $x=1000$; $x<0{,}001$. **107.** а) В I и III; б) во II и IV. **108.** $A(2;\ 2)$ и $B(-2:\ -2)$; $x<\frac{4}{x}$ при $x<-2$ и при $0<x<2$; $x>\frac{4}{x}$ при $x>2$ и при $-2<x<0$.

Глава II

5. а) Нет; в) да. **6.** а) $-5x^4+7x^2$; в) $b^3+ab^2+3a^2b$. **9.** а) $x^5-3x^4+6^3-12x^2-7x+5$. **10.** а) $-0{,}3p^4$; в) $-11x^2y+1$. **11.** а) $12\frac{79}{196}$; б) 5,168. **13.** Через 6 дней. **14.** 15 и 5 т. **16.** а) $x=3$. **17.** а) 360; б) 1,2. **19.** 11764. **22.** 18,522. **24.** а) $x^4-6x^3+18x^2$. **27.** а) $-5{,}5x^2+12y^2$. **28.** $k-h+2m$. **33.** а) $-0{,}45$. **36.** а) $x=-1{,}5$; в) $x=8$. **37.** 40 км/ч, 30 км/ч. **38.** $11\cdot 5$ р. $+15\cdot 3$ р. **39.** г) $4x^4+2{,}5x^2-15x$. **40.** а) $4x^5-3{,}5x^2-7x$; в) $\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{12}x^2+1\frac{1}{30}x^2y$. **41.** а) $0{,}1a^2+\frac{1}{15}a-\frac{1}{20}b^2$; в) $a^3-2a^2-4a+0{,}2$; д) $25x^4-x^3$. **42.** а) $-7x^6+12x^4-5x^3+9x^2-7$. **45.** 5. **46.** $-11{,}85$. **47.** 0; 16. **48.** а) a^2; в) $a^3x^2y^3$. **50.** а) 2,28. **51.** а) $x_1=0$, $x_2=17$; в) $y_1=-11$, $y_2=-2$; д) $y_1=0$, $y_2=8$. **53.** а) $\frac{a+4b}{2ab}$; г) $\frac{n}{1+3n}$; ж) $\frac{2}{3}$; к) $\frac{1}{3x}$. **55.** а) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{4by}{7cx}$. **56.** а) 2,5. **57.** а) $\frac{5x^2+8x+1}{x^3-5x^2}$. **60.** а) x^2+5x+6; г) x^2-9x+8; ж) $-x^2-21x-56$. **61.** а) $x=-3$; б) x — любое число; в) $x=2$. **62.** а) $5x^3+x^2-4x$; г) $33t^5-22t^4-27t^3+18t^2$. **63.** а) $19b-10$; в) $-a^3b-a^2b^2-5ab^2$. **64.** а) 0; в) 12. **65.** а) $x=-0{,}8$. **67.** а) $2x^3-2x^2+10x+4$. **70.** а) $(a+3)(b+c)$; д) $(a-1)(p+q)$. **73.** а) $(3x-y)(x-y)$;

в) $(b-c)(2b-3c)$. **76.** а) $x_1=7$, $x_2=-3$; в) $x_1=-2$, $x_2=4$. **78.** а) $(x+y)(m+10)$; г) $(a+b)(c-2)$; ж) $(a+x)(x-ay)$; к) $(xy-3)(8y^2-7a)$. **79.** а) $(a+c)(n^2+p^2-p)$; в) $(y^3-a)(x-b+1)$. **80.** а) 52. **81.** а) $(5x-2)(x^2+1)$; в) $(a+b)(a+5b)$. **82.** а) $\frac{8}{13}$; в) 0. **83.** а) $\frac{a+b}{7}$; в) $\frac{y-1}{x+5}$. **84.** а) 4. **86.** а) $x=-8$. **87.** а) x^2-9; б) $4a^2-25$; в) $9p^2-49$; г) $9b^2-c^2$; д) $0{,}09x^2-1$; е) $10000-\frac{1}{4}a^2y^2$; ж) a^6-4; з) $9a^2b^4-c^6$; и) $a^2y^4-b^2x^4$; к) $64a^6-9b^6$. **88.** а) $\frac{a^2}{4}-\frac{c^2}{9}$; б) $\frac{a^4}{16}-\frac{b^4}{49}$; в) $\frac{p^6}{9}-1$; г) $\frac{a^6}{16b^2}-\frac{b^6}{9a^2}$; д) $\frac{a^2x^4}{b^2y^2}-\frac{c^2y^4}{d^2x^2}$; е) $\frac{n^{10}}{25}-16$. **89.** а) $16-x^2$; б) $81-4x^2y^2$; в) $0{,}49a^2-b^2$; г) $a^2-\frac{4}{9}b^2$; д) $0{,}09x^2y^2-z^2$; е) $a^2-\frac{b^2}{9}$; ж) $\frac{x^2}{100}-\frac{x^2y^2}{9}$; з) $144b^4-a^2$. **90.** а) $4a^4-b^2$; б) $100x^6-1$; в) $0{,}04a^2x^8-1$; г) $c^{20}-9$; д) $x^{12}-y^{20}$; е) $4y^2-a^{16}$. **91.** а) 1591; б) 2484; в) 8096; г) 39999. **92.** а) $4b^2-4c^2$; б) $3y^2-192$; в) $3x^2-75$; г) y^4-256. **93.** а) $(ax-ay)(ax+ay)=(ax)^2-(ay)^2$; б) $(7+7a)(7-7a)=7^2-(7a)^2$; в) $(ab-ac)\times(ab+ac)=(ab)^2-(ac)^2$; г) $(x^3)^2-(x^2)^2$; д) $(p^2)^2-1$; е) $(y^2)^2-9^2$; ж) $(a+b)^2-1^2$; з) $x^2-(y-2)^2$; и) $1^2-(x+y)^2$; к) $(a+b)^2-c^2$. **94.** а) $(x-y)(x+y)$; б) $(2-p)(2+p)$; в) $(ab-c)(ab+c)$; г) $(5c-3)(5c+3)$; д) $(10-a^2)(10+a^2)$; е) $(9cd-10a)(9cd+10a)$; ж) $(11x-7y)(11x+7y)$; з) $\left(0{,}1a-\frac{2}{3}\right)\left(0{,}1a+\frac{2}{3}\right)$; и) $(0{,}8b-0{,}5)(0{,}8b+0{,}5)$; к) $(1{,}2y^5-0{,}1)(1{,}2y^5+0{,}1)$; л) $\left(\frac{4}{5}x^2-\frac{7}{9}y^3\right)\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{7}{9}y^3\right)$; м) $\left(\frac{5}{6}x^2y^2-\frac{3}{7}ab\right)\times\left(\frac{5}{6}x^2y^2+\frac{3}{7}ab\right)$. **95.** а) 840; б) -1160; в) 7400; г) 10400; д) 4,25; е) 10,13; ж) $13\frac{1}{3}$; з) $50\frac{10}{11}$. **96.** а) $\frac{4}{7}$; б) 1; в) $\frac{5}{8}$; г) $\frac{1}{2}$. **97.** а) $(a^{50}-2)(a^{50}+2)$; б) $(x^{15}-3)\times(x^{15}+3)$; в) $(5^n-7)(5^n+7)$; г) $(10c-2^n)(10c+2^n)$. **98.** а) $\frac{p+q}{p}$; б) $\frac{2a-3b}{a}$; в) $\frac{1}{x-3y}$; г) $\frac{11x}{5x+6b}$; д) $\frac{1}{a-1}$; е) $\frac{x-y}{x+y}$; ж) $\frac{a+b}{a-b}$; з) $\frac{y-4}{3}$; и) $\frac{3z}{5z+3}$. **99.** а) $(x+2)\times(x+4)$; б) $(7-b)(9+b)$; в) $(5-4a)(1+4a)$; г) $(12+a)(-2-a)$; д) $(15-5y)(3+5y)$; е) $(x^4-x^2-6)(x^4-x^2+6)$; ж) $x(x-1)(x+1)$; з) $y(a-y)(a+y)$; и) $(a-1)(a+1)(a^2+1)$; к) $(2-b)(2+b)(4+b^2)$; л) $(b-1)(a-1)(a+1)$; м) $(x-2)(x+2)(b-1)$; н) $(a-b)\times(3a-1)(3a+1)$; о) $(y-5)(y-4)(y+4)$. **100.** а) $x_1=1$, $x_2=-1$; б) $x_1=3$, $x_2=-3$; в) $x_1=4{,}5$, $x_2=-4{,}5$; г) $y_1=0$, $y_2=1{,}25$, $y_3=-1{,}25$; д) $y_1=4$, $y_2=-4$, $y_3=6$; е) $y_1=-8$, $y_2=-5$, $y_3=5$; ж) $\varnothing$; з) $y=0$. **101.** а) $(x-y)(x+y+1)$; б) $(x+y)(x-y-1)$; в) $(2a-b)(2a+b-1)$; г) $(a+2b)(a-2b+1)$; д) $a(b+1)(ab-a-b)$; е) $b(c+5)(bc-5b-4)$; ж) $(9x+10y)(9x-10y-1)$; з) $(4n-7k)(4n+7k-5)$. **102.** а) 78,4; б) 706. **103.** а) $15(n-1)(n+1)$; б) $14(n+1)(n+2)$. **104.** а) $\frac{b-5}{b(b^2-1)}$; б) $\frac{2x+16}{x(x^2-4)}$; в) 0; г) $-\frac{10m}{m^2-9}$; д) $\frac{1}{1-m^2}$; е) $\frac{2}{n+3}$. **105.** а) $-\frac{1}{6}$; б) 0. **106.** а) $\frac{1}{x+2}$; б) $\frac{6y+19}{y^2-9}$; в) $\frac{3}{a-6}$;

г) $\frac{-8}{2b-3}$; д) $\frac{2x}{x-3}$; е) $\frac{1}{2x(x-1)}$; ж) $\frac{1}{6}$; з) $\frac{2m+1}{6(2m-1)}$; и) $-\frac{2}{a}$; к) $-\frac{1}{xy}$. **107.** а) $\frac{2(m-3n)}{mn}$; б) $\frac{y}{x^2}$; в) $\frac{2a+b}{ab}$; г) $\frac{-b-3}{b(2b+a)}$. **108.** а) $\frac{3m(m-2n)}{n(m+2n)}$; б) $\frac{1}{(2m-7n)(a-5b)}$. **109.** а) $x^2+20x+100$; б) $b^2-18b+81$; в) $4a^2+4a+1$; г) $4x^2+12xp+9p^2$; д) y^4+2y^2+1; е) $\frac{1}{4}z^2-z+1$; ж) $25n^2-30n+9$; з) $a^2-a^2b+0{,}25a^2b^2$; и) $x^4-4x^3y+4x^2y^2$; к) $\frac{1}{4}a^2b^2+ab^2c+b^2c^2$; л) $a^6-2a^3b^3+b^6$; м) $25y^4+40x^2y^2+16x^4$. **110.** а) $0{,}25a^2-0{,}6ab+0{,}36b^2$; б) $144x^4+9{,}6x^2y+0{,}16y^2$; в) $81a^6+108a^5+36a^4$; г) $0{,}64t^4-8t^3+25t^2$; д) $a^{10}+\frac{1}{2}a^6b^3+\frac{1}{16}a^2b^6$; е) $0{,}01p^6-2p^3q^2+100q^4$; ж) $x^2+2bx^4+b^2x^6$; з) $\frac{9}{16}a^8-6a^4b^5+16b^{10}$. **111.** а) $100a^2+40a+4$; б) $-12y^2+60y-75$; в) $b^4-2b^3x+b^2x^2$; г) $yx^2+4xy^2+4y^3$; д) $40a^2-120ab+90b^2$; е) $81p^4-18p^2k^2+k^4$; ж) $256x^4-800x^2+625$; з) $81b^4-72b^2a^2+16a^4$. **112.** а) $18x^2+8y^2$; б) $10a+25+6ab-9b^2$; в) $7x^2-22x+17$; г) $16y^2+56y+22$. **113.** а) 441; б) 841; в) 5041; г) 10 404; д) 9604; е) 40 401; ж) 1600; з) 1600; и) 998 001; к) 4761. **114.** а) 225; б) 2025; в) 9025; г) 11 025; д) 42 025; е) 1 010 025. **116.** а) -3; б) 0,9616; в) 1,5; г) 12,8. **117.** а) 2; б) $\frac{1}{3}$. **118.** а) $(x-4)^2$; б) $(x+10)^2$; в) $(x+0{,}1)^2$; г) $(0{,}2x-5)^2$; д) $(7a+9b)^2$; е) $(10a^2-5b^3)^2$. **119.** а) $(x+y)^2$; б) $(c-d)^2$; в) $(a+3b)^2$; г) нет; д) $(2a-7b)^2$; е) $(5b+2)^2$; ж) $(a^2-2b)^2$; з) $(5a^3-4b^2)^2$. **120.** а) 9; б) 16; в) 48; г) 140; д) 4; е) 36; ж) 6; з) 3. **121.** а) 64; б) -392. **122.** а) $x^2+(b+1)^2$; б) $(y-1)^2-z^2$; в) $(2y-1)^2+p^2$; г) $x^2-(c-3)^2$; д) $(b-3)^2+4^2$; е) $(a+b)^2-(c-6)^2$. **123.** а) $(c-2)^2(c+2)^2$; б) $(x-3)^2(x+3)^2$; в) $(14a^2+12a+9)\times(-14a^2+12a-9)$; г) $-(5x+2)^2(5x-2)^2$. **124.** а) $(x-y-5)(x-y+5)$; б) $(b+3-4c)\times(b+3+4c)$; в) $(2a-x-1)(2a+x-1)$; г) $(y-a-5)(y+a+5)$; д) $(1-x-4y)\times(1+x+4y)$; е) $(5-a+2b)(5+a-2b)$; ж) $(y-z+u-1)(y+z-u-1)$; з) $(a+4)(a+6)$; и) $(2p-1)(2p-5)$; к) $(3x^2-3)(3x^2-11)$. **125.** а) $x_1=3{,}5$, $x_2=-2{,}5$; б) $x_1=-\frac{4}{3}$, $x_2=4\frac{2}{3}$; в) $x_1=9$, $x_2=-11$; г) $x_1=-2$, $x_2=5$; д) $x_1=-4$, $x_2=-6$; е) $x_1=-4$, $x_2=6$; ж) $x_1=4$, $x_2=6$; з) $x_1=4$, $x_2=-6$. **127.** а) Нет; б) нет; в) нет; г) да, $x=2$. **128.** а) {2,5; 0,5}; б) $\left\{1;\ \frac{5}{3}\right\}$; в) {1; 2}; г) {4; 3}; д) {−4; −3}; е) ∅; ж) {−4}; з) {5}; и) {0; 4; −4}; к) {16; 4}. **129.** а) {0; −3; −1}; б) {−2; 2; 4; −4}. **130.** а) $\frac{a+5}{a-5}$; б) $\frac{y+3}{y-3}$; в) $\frac{a+c}{a-c}$; г) $\frac{b-1}{b+3}$; д) $\frac{x-7}{x-5}$; е) $\frac{z+3}{z+1}$. **131.** а) $\frac{2x}{(x-1)(x+1)^2}$; б) $\frac{2(a^2+3b^2)}{(a-b)^2(a+b)}$; в) $\frac{8xy^2}{(x-y)^2(x+y)^2}$. **132.** а) $\frac{(x-6)(x-8)}{(x+8)(x+6)}$; б) $\frac{a-3}{a+7}$. **133.** а) $\frac{a(2a-1)}{3(2a+1)}$; б) $\frac{3m(5m-2n)}{5n(5m+2n)}$. **134.** а) 35; б) 11; в) $-2\frac{2}{3}$; г) 1,5; д) $-0{,}2$; е) $\frac{2}{11}$; ж) $\frac{1}{5}$; з) $-\frac{6}{19}$. **135.** а) -3; б) 5; в) {0; 1}; г) 15. **136.** а) {5}; б) {0}; в) {0; 5}; г) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **137.** $\frac{3}{5}$. **138.** $\frac{1}{6}$.

139. 10 км/ч. **140.** 1 км/ч. **141.** За 20 и 30 дней. **142.** 18 дней. **143.** 64 км/ч. **144.** 6 км/ч. **145.** 840 км/ч. **146.** а) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$; б) $p^3-3p^2q+3pq^2-q^3$; в) $a^3+30a^2+300a+1000$; г) $64-48b+12b^2-b^3$; д) $a^3b^3+3a^2b^2+3ab+1$; е) $8z^3-36z^2+54z-27$; ж) $27b^3-135b^2+225b-125$; з) $216x^3-108x^2y+18xy^2-y^3$; и) $x^3+12x^2y+48xy^2+64y^3$; к) $x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6$; л) $8x^6-84x^4a^2+294x^2a^4-343a^6$; м) $-a^3-12a^2x-48ax^2-64x^3$; н) $125a^6+75a^5b+15a^4b^2+a^3b^3$; о) $x^{12}-3x^8y^4+3x^4y^8-y^{12}$; п) $27a^6-9a^5+a^4-\frac{1}{27}a^3$; р) $1000y^{30}-900y^{20}z^3+270y^{10}z^6-27z^9$; с) $x^{36}+6x^{24}y^2+12x^{12}y^4+8y^6$; т) $-\frac{8}{27}a^3b^6+2a^2b^5-\frac{9}{2}ab^4+\frac{27}{8}b^3$. **147.** а) $5x^2y+2xy^2+y^3$; б) $2a^3-12a^2+21a-8$; в) $2a^6+6a^2$; г) $a^3b^3+3abc^4+c^6-b^3c^3-3a^4bc-a^6$. **150.** а) {8}; б) {1}. **151.** а) 1,728; б) 0,512; в) 117,649; г) 7762,392; д) 1006012008; е) 997002999. **152.** а) $(m+n)^3$; б) $(x+1)^3$; в) $(p-q)^3$; г) $(2a-y)^3$; д) $(10+a)^3$; е) $-(b+4)^3$; ж) $(-3x^3+1)^3$; з) $\left(\frac{1}{3}b^2-c\right)^3$; и) $(x-2y)^3$; к) $(3x^2+y)^3$; л) $(5x^3-2y^2)^3$; м) $(6x^5+3y^7)^3$. **153.** а) 125; б) 64. **154.** а) $x+y$; б) a^2-b^2. **155.** а) $\frac{3x^2+xy-2y^2}{(2x-y)^3}$; б) $\frac{5y^3+4x^2y-xy^2}{(x-4y)^3}$. **156.** а) $\frac{x-y}{x^2+y^2}$; б) $\frac{1}{x+y}$. **158.** а) x^3-27; б) $8x^3+1$; в) $27y^3-64$; г) $64a^3+125b^3$. **159.** а) $(x-3)(x^2+3x+9)$; б) $(2a-5)\times(4a^2+10a+25)$; в) $(6-7x)(36+42x+49x^2)$; г) $\left(a+\frac{1}{4}\right)\left(a^2-\frac{a}{4}+\frac{1}{16}\right)$; д) $(c-0{,}01)\times(c^2+0{,}01c+0{,}0001)$; е) $(0{,}2b+5)(0{,}04b^2-b+25)$; ж) $(0{,}4-3xy^2)(0{,}16+1{,}2xy^2+9x^2y^4)$; з) $(0{,}5-2a^3b^5)(0{,}25+a^3b^5+4a^6b^{10})$; и) $(9ab^3-4x^3y^6)(81a^2b^6+36ab^3x^3y^6+16x^6y^{12})$. **160.** а) $(a+5)(a^2+13a+43)$; б) $(y+1)(y^2-10y+37)$; в) $(3a^4+3a^2+1)\cdot 1$; г) $3\cdot(75x^8+45x^4+9)$. **161.** а) $\frac{a}{b(a-b)}$; б) $a-3$; в) 1; г) $\frac{2(a-2b)}{a^2+2ab+4b^2}$. **162.** а) $\frac{2x^2y}{(y^3-x^3)xy}$, $\frac{-3y(y^2+xy+x^2)}{(y^3-x^3)xy}$, $\frac{x(y-x)}{xy(y^3-x^3)}$; б) $\frac{4(x^2-2x+4)}{(x-2)(x^3+8)}$, $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x^3+8)}$, $\frac{(3x-5)(x^2-4)}{(x-2)(x^3+8)}$. **163.** а) $-\frac{12}{19}$; б) -1. **164.** а) $8x^3+27y^3$; б) $8x^3-27$; в) $512a^3-1331b^3$; г) $27a^3x^3+343y^3$; д) x^6-y^6. **165.** а) $\frac{3x^3y+17x^2y^2-3xy^3}{x^3+y^3}$; б) $\frac{4x^3y}{9x^4-3x^2y^2+y^4}$. **166.** а) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$; б) $\frac{2a^2-3b^2}{(a+b)^2}$; в) $(2a^2-5b^6)\left(25x^6-\frac{10}{3}x^3y^5+\frac{4}{9}y^{10}\right)$. **167.** а) $\frac{a^4-b^4}{a^4-a^2b^2+b^4}$; б) $\frac{36a^8-42a^4b^3+49b^6}{0{,}3x^2-0{,}8y^7}$. **168.** 6; 5. **169.** а) $(x-y)(x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6)$; б) $(2x-3y)(32x^5+48x^4y+72x^3y^2+108x^2y^3+162xy^4+243y^5)$; в) $(2a+3b^2)(2^{10}a^{10}-3\cdot 2^9a^9b^2+2^8\cdot 3^2a^8b^4-2^7\cdot 3^3a^7b^6+2^6\cdot 3^4a^6b^8-2^5\cdot 3^5a^5b^{10}+2^4\cdot 3^6a^4b^{12}-2^3\times 3^7a^3b^{14}+2^2\cdot 3^8a^2b^{16}-2\cdot 3^9ab^{18}+3^{10}b^{20})$; г) не разлагается. **170.** а) $1024x^5-3125y^5$; б) x^8-y^{12}; в) $32a^{10}-0{,}00243b^{15}$; г) $0{,}000064a^{12}b^6+0{,}000729x^6y^{12}$. **171.** 22621. **172.** $3\frac{1}{40}$. **173.** $\frac{14x^6+4x^4+3x^3-x^2+5x-1}{1-x^6}$. **174.** а) $1+9x^2+4y^2+z^2+$

$+6x+4y-2z+12xy-6xz-4yz$; б) $x^4+9y^4+4z^4-6x^2y^2+4x^2z^2-12y^2z^2$; в) $1+4a^4b^2+$ $+16a^2b^4+4a^2b+8ab^2+16a^3b^3$; г) $\frac{9}{16}+\frac{25}{36}a^4+\frac{49}{121}b^4+\frac{5}{4}a^2-\frac{21}{22}b^2-\frac{35}{33}a^2b^2$; д) $4+$ $+25a^4+36b^4+49c^4+20a^2-24b^2+28c^2-60a^2b^2+70a^2c^2-84b^2c^2$; е) $5a^6+10b^6+17c^6+$ $+14a^3b^3+18a^3c^3+26b^3c^3$; ж) $2(a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2c^2d^2)$. **175.** а) $(x^3-2y^5-4z^6)^2$; б) $(5a^4b^2+6a^2b^4+7x^5)^2$. **176.** а) $-2y^2z^4$; б) $25a^6x^8$. **177.** $\frac{4a^2+5ab+2bc+4ac-b^2}{(a+b+c)^2}$.

181. $S_7=\sigma_1^7-7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_2^2-7\sigma_1\sigma_2^3$, $S_8=\sigma_1^8-8\sigma_1^6\sigma_2+20\sigma_1^4\sigma_2^2-16\sigma_1^2\sigma_2^3+2\sigma_2^4$.

182. а) $10\left(\sigma_1^2+\frac{1}{2}\sigma_2\right)\left(\sigma_1^2-\frac{36}{5}\sigma_2\right)$; б) $2(\sigma_1^2-\sigma_2)\left(\sigma_1^2+\frac{1}{2}\sigma_2\right)$. **183.** а) $(x^2+xy+2y^2)\times$ $\times(2x^2+xy+y^2)$; б) $(x^2-2xy+3y^2)(3x^2-2xy+y^2)$. **184.** $\frac{7}{5}(\sigma_1^2-\sigma_2)=\frac{7}{5}(x^2+xy+y^2)$. **185.** Выражение не имеет значения, когда $x=0$, когда $y=0$, а также когда $x=2$ и $y=-3$; в остальных случаях имеет. **186.** а) При $x\neq-1$; г) при $x\neq1$; ж) при $a\neq0$. **187.** а) $\frac{x^2-1}{x^2-x+1}$; в) $\frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)^2}$ (представить числитель в виде $(x^2+y^2)^2-(xy)^2$). **188.** а) $\frac{4a^2xy^2}{3b^3}$; г) $\frac{m^2-m(b+c)+bc}{m^2+m(a+c)+ac}$; ж) $-\frac{x+y}{x^3+x^2y+xy^2}$; к) $\frac{1}{4x}$.

189. $3(a^2+b^2+c^2)$. **190.** а) $a+b+c$; г) $\frac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$. **191.** а) $\frac{1}{p^3q^3}$. **195.** $\frac{1}{a+b+c}$.

200. а) $\frac{1}{abc}$. **202.** 0. **207.** $2a+2b+2c$. **209.** $\frac{1}{1-x^2}$. **212.** а) $-8xy^2$; в) $\frac{1}{4}b^3+3by^2$.

213. а) $(x+y+1)^2$. **214.** а) $\frac{1}{2}$; б) 63 600. **216.** а) $-a^2b+4ab^2-3b^3$; в) $a^4x^2-a^2x^6$; д) $y^6-5^6k^6$; ж) $x^{6n}-y^{6n}$. **217.** а) $(2x+3y-5z)^2$; в) $(x^4-y^2)^3$; д) $(x-y-2)^3$.

221. а) $-2b^2(4b^5y+4b^3y^3+1)$; в) $(a+b)(a^2-ab+b^2+a-b)$. **222.** а) $a=-2$, $b=3$; в) $a=2$, $b=-1$. **223.** а) $\frac{3x-1}{x-2}$; г) $\frac{x+2}{x-2}$. **225.** а) $x^3+y^3+z^3-3xyz$. **228.** а) $x+y+z$.

229. а) $(x^2+x+6)(x+2)(x-1)$; в) $(x+2)(x+4)(x^2+5x+8)$; д) $x(x+5)(x^2+5x+10)$.

230. а) $(1-a-b)(1-a+b)((a+2b-1)^2-5b^2)$; в) $(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)$; д) $(y-z)\times$ $\times(y+z)(x-y)(x+y)(x-z)(x+z)$; ж) $(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$. **232.** а) Неправильная. **233.** 40 000. **234.** 90 000. **235.** а) a^6-b^6. **236.** а) $x=\frac{7}{4}$; в) $y=-9$; д) $y=-2{,}5$; ж) 6,25. **237.** а) $x=0$, $y=1$. **241.** $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$. **242.** k^2-m^2. **243.** 1. **253.** а) $3(x+y)(y+z)(x+z)$; б) $3(a-b)(b-c)(c-a)$. **254.** $24abc$. **258.** а) $-x^{12}+$ $+3x^8-3x^4+1$. **260.** а) $(x-y+z)(x^2+xy+y^2)$; в) $(x+y+z)(xy+xz+yz)$.

Глава III

1. Взвод, рота, ... **4.** Династия. Романовы, Габсбурги, ... **5.** а) Жук-олень, светляк; б) страус, пингвин; в) нет. **6.** а) Меридиан; б) параллель; в) изотерма; г) изобара; д) изогипса. **8.** Труппа. **9.** Флотилия, эскадра, крейсеры, ...

10. Букет. **11.** Экватор. **12.** а) Нет; б) да; в) нет. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. **14.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **15.** Из 12 элементов. **17.** б) $A=\varnothing$; в) $A=\{-3;\ -1;\ 1;\ 3\}$. **18.** б) $4\in D$, $5\in A$; в) $3\notin A$, $3\notin B$, $3\notin C$, $3\notin D$ и т. д. **20.** б) Круг радиуса R с центром в точке O; г) множество точек прямой, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину. **21.** б) Множество параллелограммов, у которых углы прямые. **22.** а) Многоугольники, круг; б) хищники, слон. **23.** $\frac{2}{5}\in A$, $\frac{17}{20}\in A$, $-\frac{1}{7}\notin A$, $\frac{5}{6}\notin A$. **25.** а) $\left\{\frac{n+2}{(n+1)^2}\,\middle|\, n\in N\right\}$; г) $\left\{n^2(n+1)\,\middle|\, n\in N\right\}$. **27.** г), е), ж). **28.** Сон, сомнительный, сожалеть, ... **29.** $A=\{-3;\ -2;\ 1\}$. **30.** $A=\left\{-1;\ -\frac{1}{2}\right\}$. **31.** а), б), в). **33.** Равенством всех углов. **34.** Живорождением. **36.** а) $B\subset C\subset A\subset D$; г) $F\subset D\subset E\subset C\subset A\subset B$. **37.** а) Достаточно; б) необходимо; г) необходимо и достаточно. **38.** Множество всех равносторонних треугольников. **39.** а) $[1;\ 4]$; б) $\varnothing$; в) множество натуральных чисел, делящихся на 6; г) множество натуральных чисел, делящихся на 12; д) $\{1\}$; е) $\{x\,|\,x=6k+5,\ k$ — целое число$\}$. **41.** $\{(2;\ 7);\ (7;\ 2)\}$. **44.** Множество нечетных чисел. **45.** Множество целых чисел. **46.** а) $\{-1;\ 2\}$; б) $\{1\}$; в) $\left\{-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{2};\ 3\right\}$; г) $\left\{-2;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 3\right\}$. **47.** а) $\left\{(1;\ 1);\ \left(\frac{5}{3};\ \frac{5}{6}\right)\right\}$; б) $\{(-4;\ -2);\ (4;\ 2)\}$. **48.** а) $\varnothing$; б) A. **49.** $A\setminus B=[1;\ 2)$, $B\setminus A=(4;\ 6]$. **50.** $\{x\,|\,x=4k+3,\ k$ — целое число$\}$. **51.** а) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; б) $\{0\}$; в) $\{-2\}$. **54.** а) $[-1;\ 7]$; б) $[2;\ 3]$; в) $[2;\ 6]$; г) $[1;\ 5]$; д) $[1;\ 5]$. **55.** а) Множество учеников, изучающих французский и английский или немецкий язык или все три языка; в) множество учеников, изучающих или один немецкий язык, или два языка — английский и французский, или все три языка. **57.** $B\setminus A$. **59.** 20. **60.** 24. **61.** 6; 14. **62.** 32. **63.** 11; 1; 3; 4. **64.** а) $A\times B=\{(1;\ 2);\ (1;\ 4);\ (1;\ 6);\ (3;\ 2);\ (3;\ 4);\ (3;\ 6);\ (5;\ 2);\ (5;\ 4);\ (5;\ 6);\ (7;\ 2);\ (7;\ 4);\ (7;\ 6)\}$. **65.** а) $A=\{3\}$, $B=\{x;\ x^2;\ x^3\}$. **66.** г) $\left\{\frac{c}{2};\ \frac{c}{f};\ \frac{c}{g};\ \frac{d}{2};\ \frac{d}{f};\ \frac{d}{g};\ \frac{e}{2};\ \frac{e}{f};\ \frac{e}{g}\right\}$. **67.** а) $\{(1;\ 1);\ 1;\ 2);\ (1;\ 3);\ (2;\ 1);\ (2;\ 2);\ (2;\ 3);\ (3;\ 1);\ (3;\ 2);\ (3;\ 3)\}$. **70.** а), б). **71.** а), в). **72.** Отношение нестрогого порядка. **73.** Все, кроме отношения «равно». **75.** Да. **76.** Нет. **77.** Нет. **78.** Да. **79.** Да. **81.** а) Нет; б) да.

Глава IV

8. Нет. Например, $(1+2)\vdots 3$, но 1 и 2 не делятся на 3. **9.** Нет. Например, $(2\cdot 3)\vdots 6$, но 2 и 3 не делятся на 6. **10.** Да, поскольку $a-c=(a-b)+(b-c)$. **12.** Нет. Контрпример: $a=18$, $b=12$, $m=3$, $c=6$. **13.**

a	1729	7405	5611	85
b	381	18	8	79
q	4	411	701	1
r	205	7	3	6

15. $n^3-n=(n-1)n(n+1)$. **16.** $n^3-3n^2-4n=n(n-1)(n-2)-6n$. **21.** Нет. $2^4-2=14$ не делится на 4; $2^6-2=62$ не делится на 6. **24.** 18; 36; 72; 144. **25.** $D(180;\ 240)=60$. **29.** а) $K(846;\ 246)=34\,686$; б) $K(1960;\ 588)=5880$. **30.** $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$ при четных n; $n(n+1)(n+2)$ при нечетных n. **31.** 8 км/ч. **32.** 9 ч, 8 ч, 6 ч. **33.** 600. **34.** $\dfrac{11}{16}$. **35.** $\dfrac{1776}{337920}$ и $\dfrac{13607}{337920}$. **36.** 11. (Добавим еще одну книгу. Тогда их можно будет связать и по 2, и по 3, и по 4.) **38.** 301. **39.** а) 20; б) 4; в) $16=20-4$; г) 8; д) $32=60-20-12+4$. **40.** а) 55 и 15; в) 42 и 7 или 21 и 14; д) 3 и 915 или 15 и 183. **43.** 4; 732. **44.** 78 399 653. **53.** а, в, г. **57.** 246 915 658. **59.** 659 865 024. **62.** 2. **63.** а) 2683, 2687, 2689, 2693, 2699, 2707; б) 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347; в) нет; г) нет. **64.** а, в, д. **67.** 1, 3, 7, 9. **68.** $a^4+4=(a^2-2a+2)(a^2+2a+2)$. **70.** $n(n+2)+1=(n+1)^2$. **71.** $p=3$. **72.** $p=3$. **73.** $p=3$. **74.** $p=3$. **75.** 2; 211. ($13p=k^3-1$, отсюда $13p=(k-1)(k^2+k+1)$. **77.** Подставьте $x=1$. **78.** 16 делителей. **79.** 8. **80.** Двумя. **81.** а) 210 и 7; 35 и 42 и др.; б) 99; 77. **83.** $ab=2^9\cdot3^{10}\cdot5^3\cdot7^2\cdot11$; $D(a;\ b)=2^4\cdot3^4\cdot5$; $K(a;\ b)=2^5\cdot3^6\times\times5^2\cdot7^2\cdot11=314\,344\,800$; a не делится на b. **85.** $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)$. **86.** $2^{10}\cdot3\cdot5\cdot11^2$. **87.** Все α_r — четные. **91.** Нет. **94.** 4 способа. **95.** 8. **96.** Нет ($37^2>1093$). **100.** а) $x=4-7t$, $y=4t$ (t — целое); г) $x=1+3n$, $y=-1+11n$ (n — целое); ж) $x=1+5p$, $y=-20+19p$ (p — целое). **101.** а) $x=2$, $y=1$; г) $x=4$, $y=5$. **102.** $x=24-5k$, $y=2k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Невозможно. **103.** $x=77k+59$, где k — целое неотрицательное. **104.** $185+15$, $119+81$, $53+147$. **105.** 245. **106.** Цифр 7 и 8 в семеричной системе нет. **108.** а) Верно; б) нет, получается 51435_8. **109.** 111000101011010_2; 00111000001110011_2. **110.** 53174_8; 72415_8. **111.** $5\square9\square_{16}$. **112.** а) 6460; в) 13015. **113.** а) 201401_6; в) 3313541_8. **114.** а) В восьмеричной, в шестеричной. **116.** а) 2025_6; г) $3\square336_{16}$; ж) 684335_9; к) 203735_8. **117.** 21400_5; 214000_5. **118.** $31_4=13_{10}$. **119.** Если бы с каждым вариантом числа волос на голове (400 тыс.) было не более 17 москвичей, то всего москвичей было бы не более 6,8 млн человек. **120.** Среди данных чисел найдутся два, дающие одинаковые остатки при делении на 72. **121.** Пусть a_k равно сумме первых k данных чисел. Либо некоторое a_k делится на 100, либо некоторые a_k и a_m дают одинаковые остатки при делении на 100, тогда надо взять их разность. **122.** Пусть A — наибольшее из данных чисел. Рассмотрите 102 числа вида $A-a_k$, $A+a_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ 51$, где a_k — данные числа, меньшие A. При делении на 100 по крайней мере два из них имеют одинаковые остатки (см. принцип Дирихле), их разность делится на 100. Разность чисел вида $A+a_k$, $A-a_m$ дает сумму или разность данных чисел a_k. **123.** Рассмотрите остатки при делении на n чисел вида 11...1 (k единиц), разность таких чисел имеет вид 11...100...0. **124.** Если 29^k и 29^m оканчиваются одинаковыми пятерками цифр, то 29^{k-m} оканчивается цифрами 00001 ($k>m$). Здесь используется, что 29 взаимно просто с 10. **125.** См. упр. 123. **126.** См. упр. 124. **127.** См. упр. 121. **128.** См. упр. 124. **129.** 152 или 656. **130.** 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92. **131.** 6. **135.** 3 (5-е, 14-е, 31-е). **138.** $x_r=1$ либо $x_r=-1$. **139.** $n^2+8n+15=(n+4)(n+3)=+n+3$. **141.** $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=-1$, $x_5=1$. **142.** 3000803, 3030703 и др. **143.** 3-й выиграл у 5-го. Шахматисты, занявшие 5—8-е места, вместе набрали не менее 6 очков (в играх между собой), а занявший 2-е место набрал не более 6 очков (если он набрал 6,5 очков, то занявший 1-е место должен набрать 7 очков, т. е. выиграть у всех; тогда занявший 2-е место не мог набрать 6,5 очков). **144.** 1111. **145.** Число, состоящее из 300 единиц. Если $A=333\ldots33$ (100 троек), $x=kA$ — искомое число (k — целое), то $3x=3kA$ записано одними тройками и делится на A. Отсюда следует, что $3x$ записано целыми сотнями троек $3k=1+10^{100}+10^{200}$ (это — наименьшее делящееся на 3). **146.** 6125, 6375, 4625

4875, 5784, 5264, 5736, 5216. **147.** Если к n добавить 20, то последняя цифра числа $\frac{n(n+1)}{2}$ не изменится. **150.** $a_1=3$, $a_2=2$, $a_3=0$, $a_4=-1$. **151.** 27. (Искомое двузначное число должно быть кубом целого числа.) **152.** В деревне A. **153.** Может (распиливается 3-е звено). **154.** Поровну (если в первом стакане x молока и $5-x$ чая, то на второй стакан остается $5-x$ молока и x чая, так как чая и молока по 5 ложек). **155.** Нет. Занумеруем сектора подряд числами от 1 до 6 и будем на каждой шашке писать номер сектора, в котором она в данный момент стоит. Сумма чисел, стоящих на шашках, при перемещении шашек либо не меняется, либо меняется на 6. В начальный момент эта сумма равна 21. Если все шашки соберутся в одном секторе, то эта сумма будет кратна 6. **156.** Нет. (Если уменьшить ценность каждой купюры на 1 р., то получится, что 15 р. (нечетное число) составлено из купюр ценностью 0, 2, 4 рублей.) **159.** Нет. (1994 делится на 2, но не делится на 4.) **160.** 100. **161.** 13. **164.** При замене некоторого $x_k=-1$ на $x_k=1$ сумма либо не меняется, либо меняется на 4. Если заменить все x_i на 1, то сумма станет равна n. **165.** 10 р. (10; 5+5) и более (добавлять по 1 р.). **166.** Цифра b значения не имеет, положим $b=0$. Пусть $a>c$, числа $a0c$ и $(a-c)00$ дают одинаковый результат. Поэтому надо проверить лишь числа 100, 200, ..., 900. **168.** $10^{1992}+1$ — сумма кубов. **169.** Рассмотрите остаток от деления исходного числа на 3. **172.** Нельзя. Сумма чисел в каждой группе будет четной, но сумма всех 33 чисел нечетна. **174.** Нет. **175.** Да. Такое число можно составить из десяти единиц и больших групп нулей между ними. **176.** $x_1=3$, $y_1=5$; $x_2=4$, $y_2=7$. (Если $x\neq 0$, то y нечетно, т. е. $y=2k+1$.) **177.** 410 256. (Цифры уменьшенного числа находятся последовательно с конца умножением на 4, последняя цифра равна 4.) **178.** Таких пар двенадцать: 950 000 и 949 999, 250 000 и 249 999, 860 000 и 859 999 и т. д. **179.** $x=1$, y произвольное; $y=1$, x произвольное. **180.** Чисел без 1 будет $9^{10}-1=3\,486\,784\,400$, чисел с 1 будет $10^{10}-9^{10}=6\,513\,215\,600$, почти вдвое больше. **181.** $15x^2$ делится на 5, а $7y^2+9$ не делится. **183.** Нет. Число кабелей связи получается не целым: $77\cdot 15:2$. **184.** 8, 9 и 10 можно (проверяется непосредственно), дальше надо добавлять числа, кратные 3. **186.** 175. Для доказательства того, что сумма не зависит от выбора чисел, надо представить таблицу в виде суммы (почленной) двух таблиц:

1	2	3	4	5	6	7		0	0	0	0	0	0	0
1	2	3	4	5	6	7	и	7	7	7	7	7	7	7
.	.	.	.	.	.	.		.	.	.	.	.	.	.
1	2	3	4	5	6	7		42	42	42	42	42	42	42

В таблицах будет взято по одному числу из каждого столбца и из каждой строки. **187.** Произведение чисел, стоящих в столбце, может быть равно $+1$ или -1. Сумма 7 произведений (по столбцам) может принимать значения ± 7, ± 5, ± 3, ± 1. То же справедливо для строк. Чтобы сумма 14 произведений была равна нулю, нужно, чтобы суммы произведений по столбцам и по строкам были противоположными числами. А это невозможно. Например, $+7$ (по столбцам) получается только тогда, когда количество -1 в столбцах четное, а -7 по строкам только тогда, когда количество -1 в строках нечетное. Общее же количество -1 в строках и столбцах одинаково. **188.** 11, 12, 24, 36, 15. Если число записано цифрами a, b, то b кратно a и либо $b=a$, либо $b=2a$, либо $b=5a$. **189.** 405. 2025, 6075, 10 125, 30 375, 50 625, 70 875. (В конце можно дописывать любое число нулей, их естественно отбросить.) Пусть нуль стоит в k-м разряде, тогда число можно записать в виде $x\cdot 10^k+y$, причем $y<10^{k-1}$. Из условия $x\cdot 10^k+y=9(x\cdot 10^{k-1}+y)$ получаем уравнение $x\cdot 10^{k-1}=8y$. Отсюда $x<8$, а y кратно делителям 10^{k-1} и не оканчивается нулями, т. е. $y_1=5$, $y_2=25$,

$y_3=75$, $y_4=125$, $y_5=375$, $y_6=625$, $y_7=875$. **190.** $l=13n+4$ (n — целое). П
скольку $8(5l+6)-5(8l+7)=13$, дробь может быть сокращена только на 13, е
ли числитель и знаменатель делятся на 13. Из соотношений $5l+6=13$
$a=5k+b$, $b=2$ (единственный вариант, когда l — целое) находим ответ. **192.** 1,
193. 2, 2, 2, 2; 2, 12 (остальные числа — единицы). Расположим данные чи
ла по возрастанию: $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_{12}$. Пусть P_{11} — произведение первых 11 ч
сел. Оно должно быть не более 12. Рассматриваем все варианты и находи
когда a_{12}, определенное из уравнения $a_{12}P_{11}=a_{12}+S_{11}$,— целое ($S_{11}$ — сум
первых 11 чисел). **194.** 3456. **195.** 5, 1, 6. **196.** 8. **197.** $2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 1$
198. Например, $n=9$. **199.** 22 201. **201.** 1) 2; 2) 0; 3) 6. **203.** Последней ци
рой n должна быть 1 или 6. **207.** 2,4. **208.** 108.

Глава V

8. $0{,}888\ldots=\frac{8}{9}$. **9.** 7,63. **11.** а) 0,75; б) 0,035; в) 0,0304; г) 1,10368; д) 0, (57142
е) 0, (90). **13.** а) $|x|<3$; в) $|x+1|<4$; д) $|x-1|\leqslant 4$. **14.** а) $-1<x<9$; в) $x>-0$,
д) $-5\leqslant x\leqslant 5$. **16.** Например, $\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$. **17.** Например, $\sqrt{2}-1$ и $\sqrt{2}+1$. **18.** а), (
20. г) 3; д) 4; е) 3. **21.** AB: $y=-\frac{1}{6}x+2\frac{1}{3}$, $-4\leqslant x\leqslant 2$; BC: $y=-\frac{9}{2}x+11{,}2\leqslant x\leqslant$
AC: $y=-\frac{5}{4}x-2$, $-4\leqslant x\leqslant 4$. **23.** AA_1: $y=\frac{5}{11}x+\frac{4}{11}$, $-3\leqslant x\leqslant 8$; BB_1: $y=-2x+$
$-2\leqslant x\leqslant 2$; CC_1: $y=\frac{13}{7}x-\frac{4}{7}$, $-4\leqslant x\leqslant 3$. **32.** а) $\frac{22}{7}>\frac{335}{113}$. **33.** а) $x\neq 0$; б) так
чисел нет; в) для всех действительных чисел; г) при $x<0$; к) $-16<x<1$
л) $x<-12$ или $x>12$; м) $x<-7$ или $x>7$. **36.** г) $3>-7$. **41.** а) $1>$
г) $-\frac{(-24)^4}{3}<\frac{(-24)^4}{12}$. **59.** в) $3{,}5\cdot 10^{-3}$; $6{,}381\cdot 10^{-1}$; $1{,}72\cdot 10^{0}$; $3{,}149\cdot 10^{0}$. **61.** $9{,}46\cdot 10^{12}$ к
64. $5{,}5\cdot 10^{6}$ мм^2. **65.** а) 23 000; г) 0,0145. **70.** 9,71; 9,99. **73.** 0,002; 0,001
77. Нет. **78.** а) $12{,}302\pm 0{,}001$; г) $2{,}6435\pm 0{,}0006$. **79.** $36{,}9679\pm 0{,}0018$,
выражение округляют до $36{,}968\pm 0{,}002$. **84.** Нет, ответ не превосходит $7\cdot 10$
$+4\cdot 6+5\cdot 10=144$. **85.** Нет, надо более чем $16\cdot 15+20\cdot 10=440$ (мин
90. а) $5<3a+7b<7$. **97.** а) $207\,000<689\cdot 315+94\cdot 314<320\,000$. **100.** в) 1
е) 300; и) 0,9; м) $\frac{5}{2}$; п) $\frac{7}{5}$. **101.** в) 0,8; е) $-0{,}7$. **102.** а) $4\frac{2}{5}$; в) $10\frac{}{}$
104. Количество верных цифр зависит от типа калькулятора. а) 178,4572778..
в) 4985,621426... . **105.** а) 1,847759065...; в) 3,368695591...; д) 10,83182209...
106. 5,71052; 1,52250; 25,40315; 75,00733. **107.** 41 см; 20,5 см. **108.** 5 см, 10
25 м (без учета провисания провода). **110.** 12 см. **111.** 8 см. **112.** а) 5; в)
113. $\sqrt{17}$, $8\sqrt{2}$, $\sqrt{193}$. **115.** 11 или -1. **116.** $15+5\sqrt{5}$. **117.** а) Да; б) д
121. а) $x=100$; в) $y=1$; д) $t=1$; ж) $x=\frac{1}{9}$. **124.** а) При $x\geqslant 0$; в) при $x\leqslant$
д) при всех x. **125.** а) $x\geqslant 3$; в) $b\geqslant\frac{1}{2}$. **126.** а) 3^2; г) $(\sqrt{10})^2$; ж) $0{,}5^2$; к) $(2\sqrt{b})$
127. а) $(x-\sqrt{7})\cdot(x+\sqrt{7})$; г) $-11\left(x-\sqrt{\frac{31}{11}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{31}{11}}\right)$; ж) $\frac{2}{3}\left(x-\sqrt{\frac{6}{11}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{6}{11}}\right)$
128. а) $x_1=\sqrt{5}$; $x_2=-\sqrt{5}$; г) $x_1=\sqrt{7{,}5}$; $x_2=-\sqrt{7{,}5}$. **130.** а) 7; г) -26; ж) 2; к)
131. а) $\sqrt{2}$; г) $-\frac{\sqrt{a}}{3}$; ж) $\frac{\sqrt{c}-1}{5}$. **133.** а) $a+2$; в) $\sqrt{x}-\sqrt{2}$. **134.** а) 0,18; г) 1,7; ж) 2

35. а) 22; 35; $1\frac{2}{3}$; 0. **136.** а) $|p|$; в) $3|b|$; д) $0{,}1|a|$. **137.** а) c; в) $2a$. **138.** а) $-x$;) $-\frac{2a}{3}$. **139.** а) $|a-1|$; г) $|2y-1|$; ж) $m-3$; к) $-k-1$. **140.** а) при $x \geqslant 1$; в) при $\leqslant 3$. **141.** $\sqrt{2}-1$; б) $\sqrt{3}-1$. **142.** а) 70; г) 180; ж) 7,8. **143.** а) 180; в) 60; д) 6. **144.** а) 5; в) 15. **146.** 9. **147.** 1848 см^2. **148.** а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$; в) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{a}$. **149.** а) $\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$; в) $\sqrt{2}(3+\sqrt{11})$. **150.** а) $\sqrt{2}-1$; б) $1-\sqrt{3}$. **151.** а) 72; в) 400. **152.** а) 24; в) 44. **153.** а) $3a$; г) $-9y^5$; ж) $-\frac{1}{3}a^3b^2$. **154.** а) 4; г) 9; ж) 21. **155.** а) $\frac{4}{5}$; е) $\frac{7}{4}$; ж) $\frac{11}{5}$. **157.** а) $\frac{1}{5}\sqrt{10}$; г) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$; ж) $\frac{3}{11}\sqrt{11}$; к) $\frac{1}{15}\sqrt{30}$;) $\frac{1}{21}\sqrt{35}$; р) $\frac{6}{5}\sqrt{130}$. **158.** а) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; ж) $\frac{2}{\sqrt{7}}$. **159.** а) 1; в) 15. **160.** а) $2\sqrt{3}$. **162.** а) $|x|\cdot y^2$; в) $\frac{4x^2}{5y^4}$. **163.** а) $\frac{2x}{1+x^2}$ при $|x|<1$; $\frac{-2x}{1+x^2}$ при $|x|>1$. **164.** а) 0 при $x \geqslant 0$; x при $x<0$; в) $2x+5$ при $x>-2$; 1 при $-3 \leqslant x \leqslant -2$; $-2x-5$ при $x<-3$. **165.** а) При $x \geqslant 1$. **166.** а) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}-\sqrt{7}}{2}$. **167.** а) $\frac{a+1}{a+2}$ при $a>2$; $\frac{-a-3}{a+2}$ при <2; в) -1. **168.** а) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{2}}$. **170.** $2\sqrt{a+b}$ при $a+b \geqslant c$; $2\sqrt{c}$ при $+b<c$. **171.** а) 10; в) 0. **175.** а) Иррационально; б) иррационально; в) рационально. **184.** Воспользуйтесь неравенствами $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ и $(a^2+b^2)^2 \leqslant \leqslant 2(a^4+b^4)$. **191.** Возведите выражение $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ в квадрат и воспользуйтесь неравенством $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$. **193.** а) $\sqrt{5}-1$; б) $\sqrt{3}+2$; в) $\sqrt{n-1}-1$. **194.** а) 1;) $\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2)$; в) 1. **195.** 0. **196.** -10. **197.** $a(a+1)$. **198.** а) $\frac{1}{12}\times$ $\times(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30})$; д) $\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)$. **199.** $a<b$.

Глава VI

1. а) $a=4$, $b=5$, $c=7$; г) $a=1$, $b=0$, $c=-4$; д) $a=3$, $b=-1$, $c=0$; е) $a=13$, $b=0$, $=0$; и) $a=-2$, $b=-1$, $c=4$. **2.** а) $4x^2-4x-2=0$; б) $6x^2-11x-4=0$; в) $2x^2-2x-$ $-2=0(x^2-x-1=0)$; г) $11x^2+56x+30=0$; д) $-17x^2+30x-11=0$; е) $11x^2-12x-7=$ $=0$; ж) $k^2x^2-kx-13=0$; з) $m^2x^2-113=0$. **3.** а) $\{-2;\ -4\}$; б) $\{-5;\ 7\}$; в) $\{8;\ 2\}$; г) $\left\{-\frac{7}{4};\ \frac{3}{5}\right\}$; д) $\{0;\ -6\}$; е) $\{2;\ -2\}$; ж) $\varnothing$; з) $\{0;\ 6\}$; и) $\{-12;\ 4\}$. **4.** а) $\{5;\ 7\}$; б) $\{-5;\ 1\}$; в) $\{2;\ 7\}$; г) $\{-7;\ 2\}$; д) $\{-2;\ 3\}$; е) $\left\{0;\ -\frac{8}{5}\right\}$; ж) $\left\{0;\ -\frac{2}{5}\right\}$; з) $\{6;\ 1\}$.

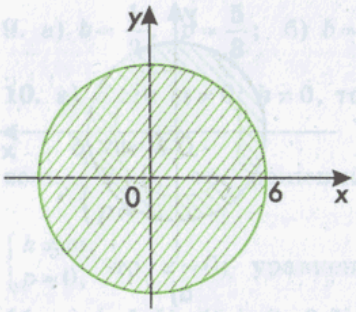
5. а) $\frac{a+13}{a+15}$; б) $\frac{x+3}{x+2}$; в) $\frac{2(a+9)}{3(a-7)}$; г) $\frac{6\left(a+\frac{1}{3}\right)}{2(a+1)}$. **6.** а) $3x^2-33x+90=0$; б) x^2+ $+x-6=0$; в) $-4x^2+56x-196=0$; г) $-3x^2-30x-75=0$; д) $2x^2-(a-b)x=0$; е) x^2- $-\frac{1}{n^2}=0$. **7.** а) $a=2$, $b=3$, $c=1$, $D=1$, 2 корня; б) $a=1$, $b=5$, $c=-6$, $D=49$,

2 корня. **8.** а) 2; б) 0; в) 1; г) 0; д) 1; е) 2. **10.** а) $\{-4;\ -2\}$; б) $\left\{-6\frac{6}{7};\ 7\right\}$; в) $\{0{,}6;\ 1\}$; г) $\{-0{,}5;\ 2\}$; д) $\left\{2;\ 2\frac{1}{3}\right\}$; е) $\{-2;\ 12\}$. **11.** а) $\{0{,}5;\ 0{,}7\}$; б) $\{\sqrt{2};\ 4\sqrt{2}\}$; в) $\{0{,}2\}$; г) $\{4;\ 25\}$; д) $\{-2;\ -5\}$; е) $\{2;\ 5\}$; ж) $\left\{-\frac{5}{7};\ \frac{2}{7}\right\}$. **13.** а) $\{a+b;\ a-b\}$; б) $\{2a;\ 2b\}$; в) $\{a;\ 2a\}$; г) $\{-a;\ 2a\}$; д) $\{a-1;\ a-2\}$; е) $\{a;\ b\}$; ж) $\left\{a;\ -\frac{1}{a}\right\}$; з) $\left\{\frac{a+b}{2};\ a+b\right\}$. **14.** а) Если $\begin{cases}a\neq -1,\\ a\neq 3,\end{cases}$ то 1 корень; если $a=-1$, то бесконечное множество корней; если $a=3$, то корней нет; б) если $a\neq -3$, то 1 корень; если $a=-3$, то корней нет; в) если $\begin{cases}a\neq -1,\\ a\neq 2,\end{cases}$ то 1 корень; если $a=-1$, то бесконечное множество решений; если $a=2$, то корней нет. **15.** а) 2; б) $\frac{2}{5}$. **17.** а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{13}{14}$; в) $m=a-b$, если $b\neq 0$; m — любое, если $b=0$. **19.** а) любое $m\in(3;\ +\infty)$; б) любое $m\in(-\infty;\ 3)$; в) 3. **20.** а) $m\in(-0{,}4;\ 0)\cup\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$; б) $-0{,}4$. **21.** а) $k=\frac{13-p^2}{12}$, p — рациональное число; б) $k=\frac{p^2-13}{4}$, p — рациональное число. **22.** а) $(x-3-\sqrt{2})\times$ $\times(x-3+\sqrt{2})$; б) $(x-13)(x-2)$; в) $(x-4)(x+11)$; г) $(x+20)(x+5)$; д) $(x+5)(x+2)$; е) $(x-8)(x-9)$; ж) $2(x-1{,}2)(x+2{,}7)$; з) $2(y-2)\left(y+\frac{3}{2}\right)$; и) $16\left(x-\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{9}{4}\right)$; к) $-(x-9)\times$ $\times(x+3)$; л) $(2x+7)(2x+7)$; м) $9\left(x-\frac{8}{3}\right)\left(x-\frac{8}{3}\right)$; н) $(x-9)(x+12)$; о) $(x+2{,}5)\times$ $\times(x+3{,}4)$; п) не разлагается; р) $6(x-1)\left(x-\frac{1}{6}\right)$. **23.** а) $(y+b)(y-a-b)$; б) $(z-c)\times$ $\times(z-2ab)$; в) $(x-\sqrt{b})(x+a+\sqrt{b})$; г) $(1-a^2)\left(x-\frac{1+a}{1-a}\right)\left(x-\frac{a-1}{1+a}\right)$. **24.** а) $5(x-y)\times$ $\times(x-0{,}4y)$; б) $6(x+y)\left(x+\frac{11}{6}y\right)$; в) $(x+y)(x-3y)$; г) $(x-8y)(x+5y)$. **25.** а) $\frac{y-3}{y+4}$; б) $\frac{2m+3}{m-2}$; в) $a-1$. **27.** а) $y_1+y_2=0$, $y_1\cdot y_2=-\frac{15}{4}$; б) $x_1+x_2=12$, $x_1\cdot x_2=0$; в) $x_1+x_2=\frac{9}{2}$, $x_1\cdot x_2=-5$; г) $z_1+z_2=-2$, $z_1\cdot z_2=-14$; д) $x_1+x_2=9$, $x_1\cdot x_2=20$; е) $x_1+x_2=-2$, $x_1\cdot x_2=-80$. **28.** а) $x^2-7x+10=0$; б) $x^2-9{,}5x-5=0$; в) $12x^2-$ $-x-1=0$; г) $25x^2+40x+16=0$. **29.** а) $\left\{2;\ -\frac{2}{3}\right\}$; б) $\{1+\sqrt{10};\ 1-\sqrt{10}\}$; в) $\left\{-2;\ -\frac{3}{2}\right\}$; г) $\left\{\frac{-9+\sqrt{17}}{4};\ \frac{-9-\sqrt{17}}{4}\right\}$. **30.** а) Нет; б) нет. **31.** а) $x_2=-5$, $p=-2$; б) $x_2=-1$, $a=-2$; в) $x_2=\frac{3}{5}$, $b=-43$; г) $x_2=-2{,}1$, $c=-111{,}3$; д) $a=\frac{9}{20}$, $x_2=\frac{10}{3}$; е) $q=35$; ж) $c=-8{,}75$. **32.** а) Корни различных знаков; б) корни положительные; в) корней нет; г) корни положительные; д) корней нет; е) корни различных знаков.

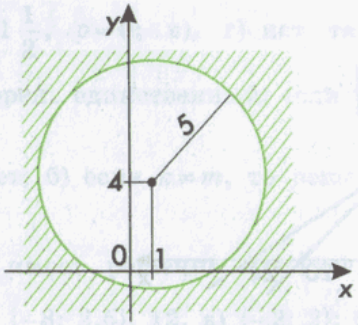
33. а) $4y^2-5y-1=0$; б) $y^2-20y-64=0$; в) $16y^2+185y-4=0$; г) $4y^2+33y+4=0$; д) $4y^2+15y-50=0$; е) $16y^2-33y+1=0$; ж) $y^2+15y+46=0$; з) $y^2-1057y+256=0$. 34. $y^2+124y-125=0$. 35. 47. 36. а) $\sigma_1^3+\sigma_1\sigma_2$; б) $\sigma_1^5+\sigma_1^3\sigma_2-23\sigma_1\sigma_2^2$. 37. $5x^2+6x-8=0$. 38. а) $21x^2-23x+6=0$; б) $35x^2-22x+3=0$. 39. а) $7\frac{7}{9}$; б) $-194\frac{2}{3}$; в) $-2\frac{16}{27}$; г) $60\frac{22}{81}$. 40. а) $k_1=2$; $k_2=-1$; б) $\left\{\frac{-64+3\sqrt{907}}{49};\ \frac{-64-3\sqrt{907}}{49}\right\}$. 41. а) $\varnothing$; б) $\varnothing$; в) 2. 42. $\frac{1}{3}$. 43. а) $ax^2+(b+2a^2)x+(a^3+ab+c)=0$; б) $x^2+bx+ac=0$; в) $cx^2+bx+a=0$; г) $acx^2-bx+1=0$. 45. $a_1=-3$; $a_2=9$. 46. 32 см. 47. 10 и 21 м. 48. 11 и 12. 49. 7 и 8. 50. 9,6 м^2. 51. 90 см. 52. $B(0;\ 18)$; $C(0;\ -12)$. 53. а) $\{-1;\ 3\}$; б) $\{-1;\ 12\}$; в) $\{-2;\ -4\}$; г) $\{-2;\ 12\}$; д) $\{-4;\ 5\}$; е) $\{-2;\ 2{,}4\}$; ж) $\{1{,}5\}$; з) $\{-1;\ -5\}$; и) $\{-1;\ -27\}$; к) $\left\{1;\ -\frac{1}{2}\right\}$; л) $\{-9\}$; м) $\{3+\sqrt{5};\ 3-\sqrt{5}\}$. 54. а) $\left\{1;\ \frac{8}{3}\right\}$; б) $\{1;\ -9\}$; в) $\varnothing$; г) $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$. 55. -11. 56. 6. 57. $\frac{4}{3}$. 58. 1,5 ч. 59. 12 км/ч. 60. 80 км/ч. 61. 2,2 ч и 3 ч. 62. 27 км/ч. 63. 6 км/ч; 5 км/ч. 64. 11 км/ч. 65. 2 км/ч. 66. 24 ч и 16 ч. 67. $4\frac{2}{3}$ ч и $5\frac{5}{6}$ ч. 68. 15 учеников. 69. 7,5 и 4 м. 70. 384 см^2. 71. 4%. 72. 6, 8, 10. 73. 35 и 12 км. 74. 1050 р. 75. 10%. 76. 32 тетради. 77. 6 м. 78. а) $\left\{0;\ -\frac{8}{5}\right\}$; б) $\{-\sqrt{10};\ -4;\ 4;\ \sqrt{10}\}$; в) $\left\{-\frac{5}{2};\ -2;\ \frac{1}{2};\ 1\right\}$; г) $\left\{2-\sqrt{5};\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ 2+\sqrt{5}\right\}$; д) $\{-4;\ -1+2\sqrt{2};\ -1-2\sqrt{2};\ 2\}$; е) $\{0;\ -1;\ -2\}$. 79. а) $\{-1;\ 1\}$; б) $\{-3;\ 3\}$; в) $\{-4;\ 4\}$; г) $\left\{-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right\}$; д) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; е) $\varnothing$; ж) $\{-2;\ 2\}$; з) $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$; и) $\{-5;\ 0;\ 5\}$; к) $\{0\}$. 81. а) (0; 9); (1; 0); (−1; 0); (−3; 0); (3; 0); в) (0; −3); $(-\sqrt{3};\ 0)$; $(\sqrt{3};\ 0)$. 83. $x^4-12x^2+32=0$. 84. $x^4-13x^2+36=0$. 85. а) $\frac{a^2-3}{a^2-9}$; б) $\frac{x^2-2a^2}{x^2-4a^2}$. 86. $x^4-(p^2-2q)x^2+q^2=0$. 88. а) $\left\{1;\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$; б) $\left\{2;\ \frac{1}{2};\ -3;\ -\frac{1}{3}\right\}$; в) $\{1\}$; г) $\{-2+\sqrt{3};\ -2-\sqrt{3}\}$. 90. а) (7; 3); $\left(-3;\ -\frac{1}{3}\right)$; б) (1; 3); (−1,25; −1,5); в) (10; 1,8); г) (−5; 3); д) (6; 4); (−6; −4); е) $\left(2;\ \frac{1}{3}\right)$; ж) (−3; −2); (3; 1); з) (5; −8); (3; −5). 91. а) (7; 1); $\left(-\frac{74}{13};\ \frac{59}{26}\right)$; б) (2; −1); (1,5; −0,5). 92. а) (1; 1); $\left(\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$; б) (3; 4); (3; −4); (0; 5); в) (0; 10); (0; −10); (8; −6); (−8; −6); г) (5; 5); (−5; −5); (−5; 5); (5; −5). 93. а) (4; −2); (−2; 4); (−4; 2); (2; −4); б) (8; 6); (6; 8); (−8; −6); (−6; −8); в) (−5; −3); (3; 5); (5; 3); (−3; −5); г) (6; −4); (−6; 4). 94. а) (5; 2); (5; −2); (−5; 2); (−5; −2); б) (−1; 3); (−1; −3); (1; −3); (1; 3); в) (1; 3); (5; 1); г) (8; −5); (2; 1); д) (12; −2); (−2; 12); е) (−4; −10); (10; 4); ж) (2; 1); $\left(\frac{5}{6};\ 3\frac{1}{3}\right)$; з) (6; 15); (−2,5; −2). 95. 420 м^2. 96. 35 и 12 см. 97. 20 и

2 м. **98.** 28 и 12 м; 24 и 16 м. **99.** 15 и 8 дм. **100.** 60 см. **101.** 12 и 16 км/ч. **102.** 60 и 75 км/ч. **103.** (1; 2); (−1; 6); $(\sqrt{2}; 4-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2})$. **104.** б) $(a-1; -1)$; $(1; 1-a)$; в) $a=2$; г) $a=0$. **106.** (2; 1); $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$; (−2; −1); $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. **108.** (1; 2); (−1; −2). **109.** (2; −1); (−1; 2). **110.** (1; 3); (3; 1). **111.** (1; 3); (3; 1). **112.** а) (3; −1); (−1; 3); (−3; 1); (1; −3); б) (2; 3); (3; 2); в) (3; 4); (4; 3); г) (4; 1); (1; 4); д) (1; 3); (3; 1); е) (2; −1); (−1; 2); ж) (3; −2); (−2; 3); $(1+\sqrt{6}; 1-\sqrt{6})$; $(1-\sqrt{6}; 1+\sqrt{6})$; з) (4; 8); (8; 4); и) (2; 3); (3; 2); (1; −6); (−6; 1); к) (3; 1); (1; 3). **113.** $a=2$. **114.** $a_1=1$; $a_2=2$. **115.** При всех m, кроме $m=\frac{2}{3}$, $m=-6$ и $m=\frac{18}{7}$; $x=1$ при $m=4$. **116.** $a_1=2$; $a_2=\frac{9}{2}$. **117.** $a_1=-\frac{125}{8}$; $a_2=\frac{27}{8}$. **118.** $p=-3$. **119.** $k_1=-\frac{6}{19}$; $k_2=6$. **120.** $b=-13$. **121.** $a_1=0$, $b_1=0$; $a_2=1$, $b_2=-2$. **122.** $a_1=3$; $a_2=4$. **123.** $m=-2$, $x=1$. **124.** $a=\frac{1}{4}$. **125.** $a=-4$. **126.** $c=-2$, $c=1$. **127.** $m=-7$. **128.** $k=\frac{5}{2}$. **133.** а) {−3; 1,4}; б) $\{-4-\sqrt{15}; -4+\sqrt{15}\}$; в) {2; 3; 5}; г) любое $x\in[-6; 1]$; и) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **136.** $x^2-4x+1=0$. **137.** $a_1=2$; $a_2=-2$. **138.** $k=53$. **140.** $a=1$. **142.** Подставьте корень $x_0=\frac{p}{q}$ в уравнение и воспользуйтесь свойствами делимости. **145.** Пусть $x=\frac{m}{n}$ — рациональный корень уравнения, причем $m\in Z$, $n\in N$ и $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда $\frac{m^2}{n^2}+p\frac{m}{n}+q=0$ или $m(m+pn)=-qn^2$. Воспользовавшись свойствами делимости, покажите, что $n=1$. **146.** Воспользуйтесь утверждением упражнения 145. **148.** $m=12$, $x_2=\frac{2}{3}$, $x_3=-\frac{3}{2}$. **149.** $m=-5$, $n=30$, $x_3=-\frac{5}{2}$. **150.** $(1-a)x^2-2(1-a)x+3a+1=0$. **151.** $a<1$. **152.** 0. **153.** $x^4-25x^2+144=0$. **154.** 50%. **155.** 20%. **156.** 848 денежных единиц. **157.** 12 и 13 см. **158.** а) $\left(-1; \frac{9}{4}\right)$; (4; −9); б) (−4; −5); (4; 5); $(-3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(3\sqrt{3}; \sqrt{3})$; в) (2; −3); (−2; 3); (3; −2); (−3; 2). **159.** $m=-\frac{2}{3}$. **160.** $b=3$. **161.** $b=-\frac{2}{3}$. **163.** а) $\left\{6; -\frac{7}{3}\right\}$; б) {1; 4}; в) {−5; −10}; г) $\left\{\frac{-7\pm\sqrt{53}}{2}; \frac{-7\pm\sqrt{45}}{2}; \frac{-7\pm\sqrt{17}}{2}; -8; 1\right\}$; д) $\left\{-1\frac{2}{3}; 5; -1\frac{1}{4}; 2\frac{1}{2}\right\}$; е) {1; 25}; ж) $\{-3; -3\pm\sqrt{10}\}$.

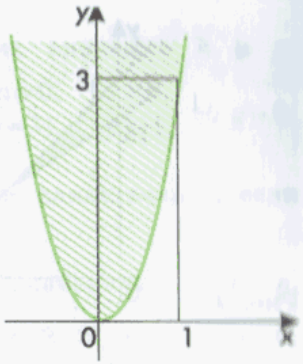
1. а) $(1{,}5;\ +\infty)$; б) $[-0{,}25;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 3)$; г) $\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; д) $(-\infty;\ 0{,}4]$; е) $\left(\frac{9}{31};\ +\infty\right)$; ж) $(0;\ +\infty)$; з) $[1{,}5;\ +\infty)$. **4.** а) $\left(-\infty;\ -\frac{7}{8}\right)$; б) $(9;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -3{,}1]$; г) $(-\infty;\ 0{,}8)$; д) $(6;\ +\infty)$; е) $(0;\ +\infty)$; ж) $\left(-\infty;\ 3\frac{7}{15}\right)$; з) $(-\infty;\ -10]$. **5.** а) $(1{,}8;\ +\infty)$; б) $[0{,}5;\ +\infty)$; в) $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right)$; г) $\left(-\infty;\ 1\frac{5}{7}\right]$; д) $(-\infty;\ 3)$; е) $(7;\ +\infty)$; ж) $(17;\ +\infty)$; з) $\left(-\infty;\ \frac{2}{13}\right)$; и) $(-\infty;\ 3{,}5)$; к) $\left(-\infty;\ \frac{17}{32}\right)$; л) $(0{,}25;\ +\infty)$; м) $\left(-\infty;\ 1\frac{3}{32}\right)$. **8.** а) $\varnothing$; б) $(-\infty;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ +\infty)$. **9.** а) $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$; б) $\{1;\ 2\}$. **10.** а) $(0;\ +\infty)$; б) $\left(0;\ 8\frac{5}{7}\right)$. **11.** а) $(-\infty;\ 0)$; б) $\left(-12\frac{13}{31};\ 0\right)$. **12.** Меньше 2 см $((0;\ 2))$. **13.** Меньше $12\frac{3}{20}$ дм $\left(\left(0;\ 12\frac{3}{20}\right)\right)$. **14.** 7, 8, 9, 10. **15.** Не более $26\frac{2}{3}$ км $\left(\left(0;\ 26\frac{2}{3}\right]\right)$. **16.** а) $[1;\ +\infty)$; б) $[-0{,}4;\ +\infty)$; в) $[2;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 2]$; д) $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right)$; е) $(-2;\ +\infty)$; ж) $[-2{,}5;\ +\infty)$; з) $[4;\ +\infty)$; и) $[2;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; к) $\varnothing$. **17.** а) $(-9;\ 10)$; б) $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; в) $(-\infty;\ -8]\cup[6;\ +\infty)$; г) $\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$; д) $(-\infty;\ +\infty)$; е) $\left\{\frac{2}{7}\right\}$; ж) $(-\infty;\ +\infty)$; з) $\varnothing$. **18.** а) $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$; б) $\{\ldots,\ -4;\ -3;\ -2;\ 2;\ 3;\ 4,\ \ldots\}$; в) $\{-3;\ -2;\ -1;\ 0\}$; г) $\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$. **19.** а) $[0;\ 2]$; б) $(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ +\infty)$; в) $\varnothing$; г) $(-\infty;\ 1]\cup[16;\ +\infty)$. **20.** $(1;\ 7)$. **21.** $(-2{,}5;\ 2)$. **22.** а) $(-\infty;\ 9)\cup(9;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 2)\cup(4;\ +\infty)$; в) $[4;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ 3)$. **23.** а) $(7{,}2;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 5)$; в) $(-\infty;\ 0{,}25)$; г) $(2{,}4;\ +\infty)$. **24.** а) $(2;\ 5)$; б) $(-\infty;\ -0{,}6)\cup(3{,}5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 0)\cup(0{,}3;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -1)\cup(0{,}5;\ +\infty)$; д) $(0{,}1;\ 0{,}4)$; е) $(-0{,}6;\ 0)$; ж) $\left(\frac{2}{3};\ \frac{3}{4}\right]$; з) $\left[-\frac{5}{7};\ -\frac{1}{4}\right)$. **25.** $(-\infty;\ -1)$. **26.** $\left(-\frac{1}{4};\ 1\right)$. **27.** а) $(1{,}5;\ 5]$; б) $\left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{2}\right]$; в) $(0;\ 7]$; г) $(-\infty;\ -2)\cup\left[\frac{3}{4};\ +\infty\right)$. **28.** а) $(-\infty;\ 3{,}5)$; б) $(-9{,}5;\ +\infty)$; в) $(27;\ +\infty)$; г) $\left(2\frac{2}{3};\ 7\right)\cup(7;\ +\infty)$. **29.** а) $(-\infty;\ -7]\cup[-2;\ +\infty)$; б) $(-3;\ 2]$; в) $(-\infty;\ 2]\cup[3;\ +\infty)$; г) $[-5;\ 3)$. **30.** а) $(-\infty;\ 5-2\sqrt{5})\cup(5+2\sqrt{5};\ +\infty)$;б) $(-\infty;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -6)\cup(3;\ +\infty)$; г) $\varnothing$; д) $(-1;\ 3{,}5)$. **31.** а) $(-\infty;\ 2)$; б) $\left(-4;\ \frac{5}{3}\right)$. **32.** а) $\varnothing$; б) $(-\infty;\ +\infty)$. **33.** а) $[-2;\ 1]$; б) $R\backslash\{-5;\ 1\}$; в) $\left(\frac{7-\sqrt{109}}{6};\ \frac{7+\sqrt{109}}{6}\right)$. **34.** а) $(17;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 1)$; в) $(0;\ 6)$; г) $\varnothing$; д) $[-1;\ 3]$; е) $(8;\ 20]$. **35.** а) $(9;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -1)$; в) $\left(0;\ 3\frac{1}{3}\right)$; г) $\varnothing$. **36.** а) $(6{,}8;\ +\infty)$; б) $[2;\ 4]$; в) $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{3}\right)$; г) $(0{,}1;\ 0{,}2)$. **37.** а) $(3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -3)$; в) $[-11;\ 3]$; г) $\varnothing$; д) $\left(-3;\ \frac{1}{3}\right)$; е) $\left(-3;\ \frac{1}{11}\right)$. **38.** а) $\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$; б) $\{4;\ 5;\ 6;\ 7\}$; в) $\{1\}$; г) $N=\{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$;



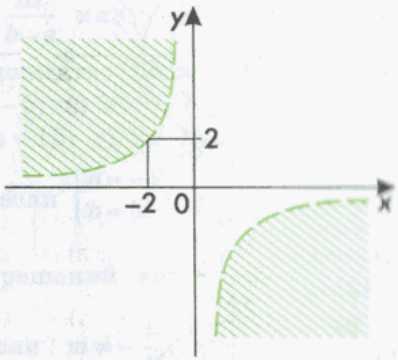
а)



б)



в)



г)

Рис. 46

д) {0; 1; 2}; е) {−6; −5; −4; −3; −2; −1; 0; 1}. **39.** а) (−∞; 2,8}; б) ∅. **40.** а) (5; 9); б) (3; 5); в) (9; 10); г) (−∞; 3)∪(10; +∞). **41.** а) (−∞; −7]∪∪[1; 5]; б) [−3; −2]∪(10; +∞); в) [0; 2]; г) (−1; 6); д) [−10; 1)∪(1,5; 3]; е) (−∞; −3)∪(−1; +∞); ж) ∅; з) (−∞; 1)∪(16; +∞). **42.** (1; 7). **43.** (−2,5; 2). **44.** а) (−∞; 9)∪(9; +∞); б) (−∞; 2)∪(4; +∞); в) [4; +∞); г) (−∞; 2)∪(2; 3). **45.** а) (−∞; −3]∪∪[3; +∞); б) [1; 6]. **46.** *A*; *C*; *D*. **47.** Полуплоскости б). **48.** а) Не принадлежит; б) принадлежит. **49.** Рис. 46. **50.** Рис. 47. **51.** Рис. 48. **52.** $\begin{cases} 5x+8y \geqslant 120, \\ x+y \leqslant 20. \end{cases}$ Рис. 49. **53.** а) Рис. 50, *а*; б) рис. 50, *б*; в) решений нет; г) рис. 50, *г*; д) рис. 50, *д*; е) точки окружности $x^2+y^2-2x-4y=0$. Рис. 50, *е*; ж) точки луча *AB*. Рис. 50, *ж*; з) рис. 50, *з*.

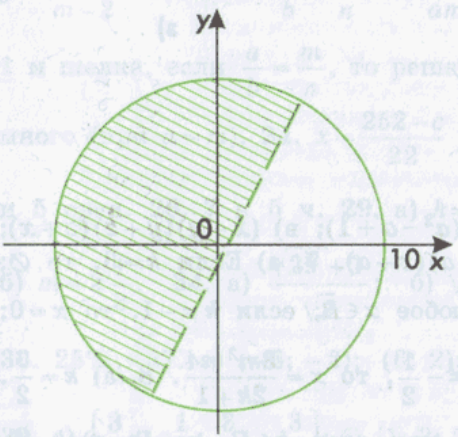


Рис. 47

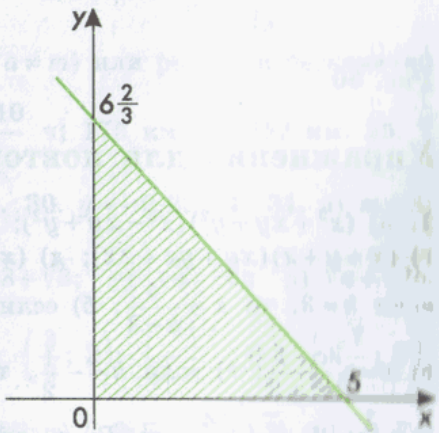


Рис. 48

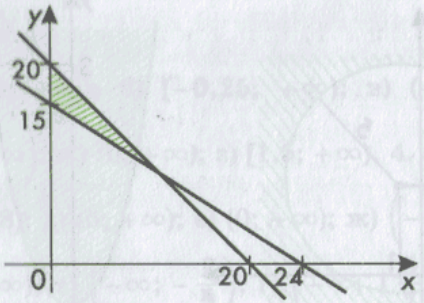
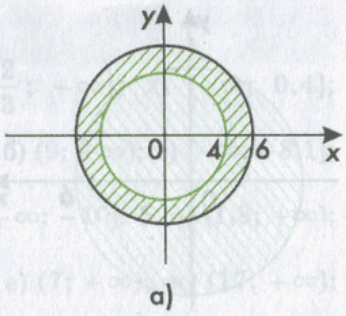
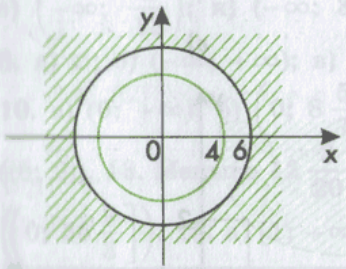


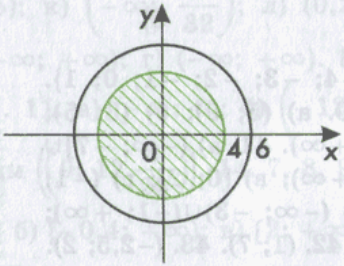
Рис. 49



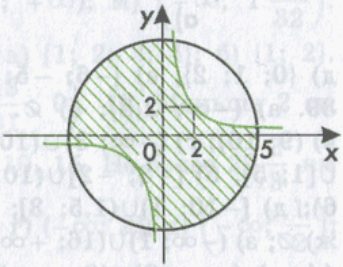
а)



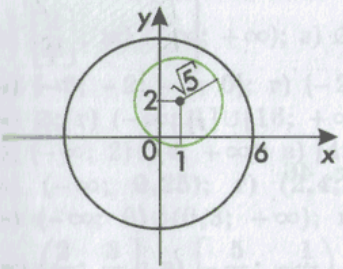
б)



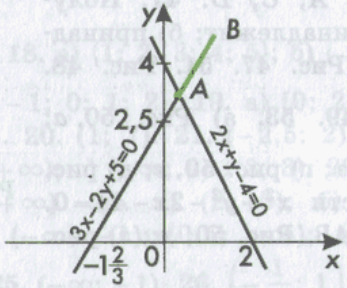
г)



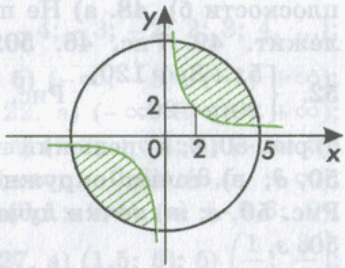
д)



е)



ж)



з)

Рис. 50

Упражнения для повторения

1. а) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$; б) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$; в) $(x+y)(y+z)(z+x)$; г) $(x+y+z)(xy+yz+zx)$; д) $(x-1)(x+1)(x-a)(x+a)$. **7.** а) Если $k=3$, то $\varnothing$; если $k\neq 3$, то $x=\dfrac{4}{k-3}$; б) если $k=-1$, то любое $x\in R$; если $k\neq -1$, то $x=0$; в) $x=\dfrac{2c+1}{2k^2+3}$; г) если $k=-\dfrac{1}{2}$, то $\varnothing$; если $k\neq -\dfrac{1}{2}$, то $x=\dfrac{3m^2+4}{2k+1}$. **8.** а) $k=\dfrac{7}{2}$, $m\neq\dfrac{1}{3}$; б) $k=-\dfrac{4}{3}$, $m\in R$; в) имеет решение при всех $k\in R$, $m\in R$; г) $k=1$.

9. а) $b=\frac{1}{2}$, $p=\frac{5}{3}$; б) $b=-31\frac{1}{2}$, $p=0$; в), г) нет таких значений b и p. **10.** а) Если $m\neq 0$; $k\neq 0$, то корень единственный; если $\begin{cases}m\neq 0,\\p=1;\end{cases}$ $\begin{cases}k\neq 0,\\p=1,\end{cases}$ то $y=0$; если $\begin{cases}m=0,\\k=0,\\p\neq 1,\end{cases}$ то решений нет; б) если $k\neq m$, то решение единственное; если $\begin{cases}k\neq m,\\p=0,\end{cases}$ то $z=0$; уравнение имеет решение при всех значениях m, k, p. **11.** а) $\{-1{,}5\}$; б) $\{-3;\ 2{,}5\}$; в) $\{-3;\ 2{,}5\}$. **12.** а) $\{-2;\ 2\}$; б) $\{-2;\ 5\}$; в) если $a\leqslant 0$, то $\varnothing$; если $a>0$, то $x=a\pm\frac{2}{a}$; г) $\{-2;\ 2\}$. **13.** 58. **14.** 54. **15.** 12 футов. **16.** Через $\frac{a-kb}{k-1}$ лет (через 10 лет; через 4 года). **17.** Через $\frac{at}{b-a}$ минут ($b>a>0$). **18.** а), г) Единственное решение; б), д) бесконечное множество решений; в), е) не имеют решений. **19.** а) $a=4$, $b=-7$; б) $a=6$, $b\neq -5$; в) $a=6$, $b=-5$. **20.** При любых значениях m. а) $m>15$; б) $m<4$; в) $4<m<15$; г) ни при каких значениях m. **21.** а) Если $\begin{cases}a=-9,\\b\neq 5,\end{cases}$ то решений нет; если $\begin{cases}a=-9,\\b=5,\end{cases}$ то бесконечное множество решений; б) если $a=1$; $\begin{cases}a=-5,\\b\neq 24,\end{cases}$ то решений нет; если $\begin{cases}a=-5,\\b=24,\end{cases}$ то бесконечное множество решений. **22.** а) Если $m\neq -\frac{5}{3}$, то $x=\frac{19}{3m+5}$, $y=\frac{2m+16}{3m+5}$; если $m=-\frac{5}{3}$, то решений нет; б) если $m=1$, то бесконечное множество решений; если $m=2$, то решений нет; если $\begin{cases}m\neq 1,\\m\neq 2,\end{cases}$ то $x=\frac{m}{m-2}$, $y=\frac{2m-7}{m-2}$. **23.** Если $\frac{a}{b}\neq\frac{m}{n}$, то $\frac{(n-b)d}{an-bm}$ р.— цена 1 м сукна, $\frac{(a-m)d}{an-bm}$ р.— цена 1 м шелка, если $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, то решений нет (при $a\neq m$) или решений бесконечно много (при $a=m$). **24.** $x=\frac{252-c}{22}$ ч, $y=\frac{1{,}2c-210}{22}$ ч; 175 км$\leqslant c\leqslant$252 км. **25.** 7 и 5 овец. **26.** 7 и 5 ч. **29.** а) $k=2$; б) $k=-\frac{3}{4}$. **30.** $y=-0{,}2x+4$. **31.** а) $m=3$; б) $m=2\frac{1}{3}$. **34.** а) $\frac{\sqrt{29}+1}{\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{10}-1$; в) $\sqrt{13}+\sqrt{3}$; г) $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$; д) $\sqrt{a}+\sqrt{2b}$. **36.** 25%. **37.** а) $(-6;\ -2)$; $(6;\ 2)$; б) $(-1;\ -3)$; $\left(\frac{3}{2};\ 2\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2};\ 0\right)$; $\left(\frac{\sqrt{7}}{2};\ 0\right)$. **39.** а) $\left\{\frac{3}{4};\ -\frac{1}{2};\ \frac{3}{5};\ -\frac{3}{7}\right\}$; б) $\{1;\ 3;\ 5;\ 15\}$; в) $\{16;\ 64\}$; г) $\{-3;\ 3;\ -\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$. **40.** а) Ес-

ли $\begin{cases} p \neq 2, \\ p \neq -2, \\ p \neq \dfrac{3}{2}, \end{cases}$ то $x = -\dfrac{(p-2)^2}{2p^2+p-6}$; если $p=2$; $p=-2$; $p=\dfrac{3}{2}$, то $\varnothing$; б) если $\begin{cases} p \neq 0, \\ p \neq 1, \\ p \neq -1, \end{cases}$

то $x = \dfrac{p^2+p-3}{p^2}$; если $p=-1$; $p=0$; $p=1$, то $\varnothing$; в) если $p=0$, то любое

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; если $\begin{cases} p \neq 0, \\ p \neq 2, \\ p \neq -\dfrac{1}{7}, \end{cases}$ то $x = -\dfrac{2}{5}(2p+1)$; если $p=2$; $p=-\dfrac{1}{7}$, то $\varnothing$;

г) если $a = \dfrac{1}{3}$, то любое $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$; если $a \neq \dfrac{1}{3}$, то $\varnothing$;

д) если $\begin{cases} m \neq 2, \\ n \neq 0, \\ m \neq 6n, \\ m \neq 3n+2, \end{cases}$ то $x = \dfrac{3n-2}{m-3n-2}$; если $\begin{cases} m = 4, \\ n = \dfrac{2}{3}, \end{cases}$ то любое $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;

если $m=2$; $n=0$; $\begin{cases} m = 6n, \\ n \neq \dfrac{2}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} m = 3n+2, \\ n \neq \dfrac{2}{3}, \end{cases}$ то $\varnothing$; е) $x=-2a$ или $x=3a$; ж) если $a=0$,

то $\varnothing$; если $a \neq 0$, то $x_1 = a+1$, $x_2 = \dfrac{a+1}{a}$; з) если $a \neq -1$, то $x=1$; если $a \neq 1$, то $x=-1$.

45. а) $b^3x^3+a^3y^3$; в) $x^3a^3-b^3(x-a)^3$. **47.** б) $[-4; 10]$; г) $[-1; 8]$. **54.** а) $m=1$; б) $m=-\dfrac{1}{2}$. **55.** а) $(x-y+3)(5x-2y+15)$; б) $(2x-3y-16)(2x+y+4)$. **56.** а) $y^2+1496y-125=0$; в) $y^2-\dfrac{11}{5}y-\dfrac{1}{5}=0$. **57.** а) $\left\{-2; \dfrac{2}{3}\right\}$; б) $\left\{-2 \pm \sqrt{3}; \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$; в) $\{-4; 2; -1 \pm \sqrt{2}\}$.

58. $\left\{\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\pm\dfrac{8}{\sqrt{111}}; \mp\dfrac{9}{\sqrt{111}}\right)\right\}$. **60.** а) $(-1; 1)$; б) $\left(-\dfrac{1}{6}; +\infty\right)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. ДРОБИ 3

1. Понятие дроби . . . . . —
2. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух одночленов 7
3. Основное свойство дроби и его применение 9
4. Умножение и деление дробей 15
5. Сложение и вычитание дробей 18
6. Возведение дроби в степень 22
7. Функция $y=\frac{k}{x}$ 24
8. График обратной пропорциональности 26

ГЛАВА II. МНОГОЧЛЕНЫ 29

§ 1. Операции над многочленами . . . . . —

1. Стандартный вид многочлена . . . . . —
2. Сложение и вычитание многочленов 34
3. Умножение многочлена на одночлен 36
4. Деление многочлена на одночлен 37
5. Вынесение общего множителя за скобки 39
6. Умножение многочленов 42
7. Разложение многочленов на множители методом группировки 44

§ 2. Формулы сокращенного умножения 48

8. Умножение суммы двух выражений на их разность . . . —
9. Возведение в квадрат суммы и разности двух выражений 52
10. Выделение полного квадрата из трехчлена 55
11. Решение уравнений с переменной в знаменателе дроби . 58
12. Возведение в куб суммы и разности двух выражений . . 60
13. Разложение на множители суммы и разности кубов . . . 63
14. Формула для разложения на множители разности степеней 66
15. Формула квадрата суммы нескольких слагаемых 68
16. Тождественные преобразования 69
17*. Симметрические многочлены от двух переменных . . . 74

Дополнительные упражнения к главе II 77

ГЛАВА III. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ 87

1. Множества и их элементы . . . . . —
2. Характеристическое свойство множества 90
3. Подмножества 93
4. Пересечение и объединение множеств 96
5. Разность множеств 99
6. Алгебра множеств 100
7. Формулы включений и исключений 102

8*. Декартово произведение множеств 105
9*. Отношение порядка 107
10. Эквивалентные множества 109

ГЛАВА IV. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА 112

§ 1. Делимость чисел . . . . . —
1. Натуральные числа и их свойства . . . . . —
2. Делимость целых неотрицательных чисел 114
3. Наибольший общий делитель двух чисел и наименьшее общее кратное. Алгоритм Евклида 117
4. Взаимно простые числа и их свойства 122
5. Признаки делимости 124
§ 2. Простые числа 127
6. Основной закон арифметики натуральных чисел . . . . —
7. Каноническое разложение натурального числа на простые множители 131
8. Свойства простых чисел 133
9*. Неопределенные уравнения первой степени 135
10*. Системы счисления 137
11*. Принцип Дирихле 142
Дополнительные упражнения к главе IV 144

ГЛАВА V. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА 150

§ 1. Числа и координаты . . . . . —
1. Действительные числа и измерение величин . . . . . —
2. Рациональные и иррациональные числа 155
3. Арифметические операции над действительными числами 157
4. Обращение периодических десятичных дробей в обыкновенные 160
5. Координаты точки на прямой линии и на плоскости . . . 162
§ 2. Бесконечные числовые множества и их свойства 165
6. Числовые множества . . . . . —
7. Счетные множества 168
§ 3. Неравенства и приближенные вычисления 171
8. Свойства числовых неравенств . . . . . —
9. Доказательство тождественных неравенств 175
10. Стандартная запись числа 177
11. Приближенные значения величин 178
12. Относительная погрешность 179
13. Оценка суммы и разности 181
14. Оценка произведения, степени и частного 184
15*. Приближенные формулы 187
§ 4. Квадратные корни и их свойства 190
16. Квадратный корень из числа . . . . . —
17. Вычисление квадратных корней 192
18. Геометрические приложения 195
19. Основные тождества для квадратных корней 197

20. Извлечение квадратного корня из произведения, дроби и степени 201
21*. Преобразование выражений $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ 206
Дополнительные упражнения к главе V 207

ГЛАВА VI. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 211

§ 1. Решение квадратных уравнений . . . . . —
1. Квадратные уравнения и их корни . . . . . —
2. Формула решения квадратного уравнения 215
3. Разложение квадратного трехчлена на множители 220
4. Теорема Виета 222
5. Задачи, приводящие к квадратным уравнениям 226
§ 2. Уравнения и системы уравнений, сводящиеся к квадратным уравнениям 231
6. Уравнения, приводимые к квадратным . . . . . —
7*. Возвратные уравнения 234
8. Системы нелинейных уравнений, сводящиеся к квадратным уравнениям 236
9*. Решение симметрических систем уравнений 242
10*. Уравнения и системы уравнений с параметрами 244
11. Графический метод решения систем нелинейных уравнений 246
12. Уравнения, содержащие знак модуля 248
Дополнительные упражнения к главе VI 250

ГЛАВА VII. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ 253

1. Неравенства первой степени с одним неизвестным . . . . —
2. Квадратные неравенства 257
3. Решение неравенств, сводящихся к квадратным неравенствам 261
4. Системы неравенств с одним неизвестным 264
5. Неравенства и системы неравенств с двумя неизвестными 267
Упражнения для повторения 272
Ответы 282

Учебное издание

Виленкин Наум Яковлевич
Виленкин Александр Наумович
Сурвилло Геннадий Станиславович и др.

АЛГЕБРА

8 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений
и школ с углубленным изучением математики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. Б. Грызлова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художник *А. С. Побезинский*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор *С. Н. Терехова*
Корректор *Г. М. Махова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—9
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 21.07.09. Формат 70×
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 15,49+форз.
Тираж 5000 экз. Заказ № 28605.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$ax^2+bx+c = 0,\ a \neq 0$

Дискриминант $D = b^2 - 4ac$

Корни $x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, если $D \geqslant 0$

Действительных корней нет, если $D < 0$

$x^2 + px + q = 0$ (приведенное), $x_{1,2}=-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, если $D > 0$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$, если $D = 0$

ТЕОРЕМА ВИЕТА

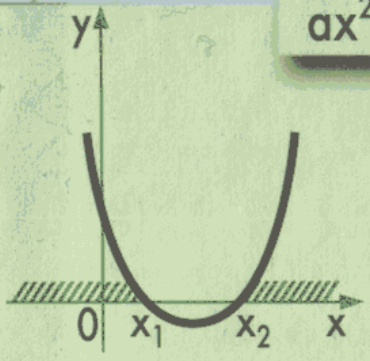
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ \ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, если $D \geqslant 0$

Если $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни $P(x)$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}, \\ x_1 x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

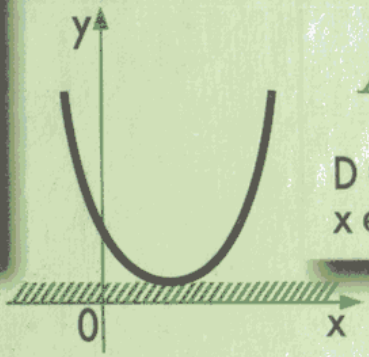
КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

$ax^2 + bx + c > 0,\ a > 0$



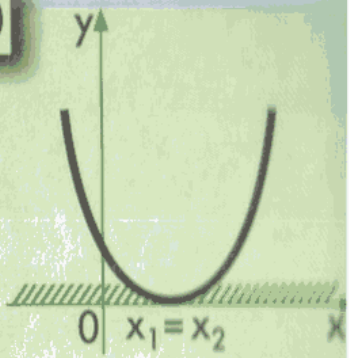
$D > 0$

$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$



$D < 0$

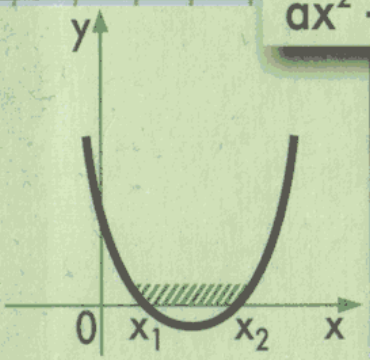
$x \in (-\infty; +\infty)$



$D = 0$

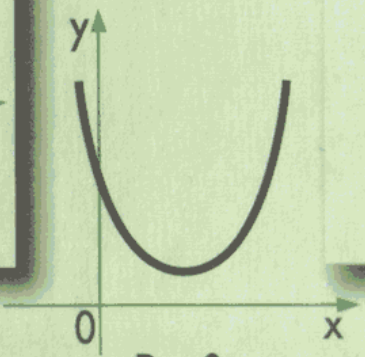
$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$

$ax^2 + bx + c < 0,\ a > 0$



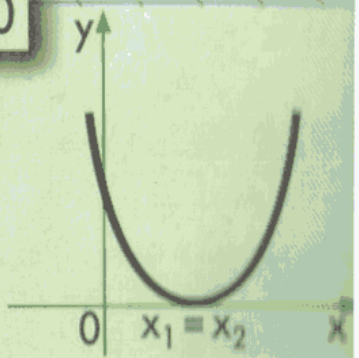
$D > 0$

$x \in (x_1; x_2)$



$D < 0$

$x \in \varnothing$



$D = 0$

$x \in \varnothing$

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2} +$$
$$+ 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} +$$
$$+ \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^{n-k} + \ldots + a + 1)$$

$$a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a + b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + \ldots +$$
$$+ (-1)^k a^{2m-k}b^k + \ldots - ab^{2m-1} + b^{2m})$$

$$a^{2m+1} + 1 = (a + 1)(a^{2m} - a^{2m-1} + \ldots + (-1)^k a^{2m-k} + \ldots - a + 1)$$

МОДУЛЬ ЧИСЛА α

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \geqslant 0 \\ -\alpha, \text{ если } \alpha < 0 \end{cases}$$

СВОЙСТВА МОДУЛЯ

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta| \qquad |\alpha - \beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|$$

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \qquad \left|\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}, \quad \alpha \neq 0$$

СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \text{ если } a \geqslant 0, b \geqslant 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ если } a \geqslant 0, b > 0$$

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \text{ если } b \neq 0, c \neq 0$$

чебно-методический комплект
ля углубленного изучения алгебры
8–9 классах содержит:

чебники для 8 и 9 классов
торы: Н.Я. Виленкин и др.

идактические материалы
о алгебре для 8–9 классов
торы: Г.С. Сурвилло и др.

борник задач по алгебре
ля 8–9 классов
торы: М.Л. Галицкий и др.

глубленное изучение алгебры
8 и 9 классах
ниги для учителя
торы: Ю.А. Дробышев и др.

ISBN 978-5-09-019502-7

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО